

# Transformada de Laplace Inversa

## Expansão em Frações Parciais

### 1 Introdução

Estamos interessados em determinar a transformada inversa de uma função da forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (1)$$

sendo que os coeficientes  $a$  e  $b$  são constantes reais e os expoentes  $m$  e  $n$  são números inteiros positivos. A razão  $N(s)/D(s)$  é chamada de **função racional própria** se  $n > m$ , e **função racional imprópria** se  $n \leq m$ . Apenas uma função racional própria pode ser expandida como uma soma de frações parciais.

Serão considerados 3 casos para a análise baseados na natureza das raízes de  $D(s)$ :

- raízes reais distintas
- raízes complexas conjugadas
- raízes reais múltiplas

O primeiro passo para escrever a expansão em frações parciais de  $F(s)$  é determinar as raízes de  $D(s)$ . Então, na soma de frações parciais, existe um termo para cada raiz simples de  $D(s)$ . No caso de raízes múltiplas, o número de termos é  $r$ , sendo que  $r$  é a multiplicidade da raiz.

### 2 Raízes Reais e Distintas de $D(s)$

Considere o seguinte exemplo:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+8} + \frac{K_3}{s+6}. \quad (2)$$

Para esta função,  $D(s)$  apresenta apenas raízes simples, portanto existe apenas um termo para cada raiz na expansão.

#### 2.1 Cálculo dos Resíduos

Para determinar o valor de  $K_1$ , multiplicamos ambos os membros de (2) por  $s$  e em seguida fazemos  $s = 0$ :

$$\left. \frac{96(s+5)(s+12)}{(s+8)(s+6)} \right|_{s=0} = K_1 + \left. \frac{K_2 s}{s+8} \right|_{s=0} + \left. \frac{K_3 s}{s+6} \right|_{s=0}$$

ou seja

$$\frac{96 \times 5 \times 12}{8 \times 6} = K_1 \Rightarrow \mathbf{K_1 = 120.}$$

Para determinar o valor de  $K_2$ , multiplicamos ambos os membros de (2) por  $s + 8$  e em seguida fazemos  $s = -8$ :

$$\left. \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+6)} \right|_{s=-8} = \left. \frac{K_1(s+8)}{s} \right|_{s=-8} + K_2 + \left. \frac{K_3(s+8)}{s+6} \right|_{s=-8}$$

ou seja

$$\frac{96 \times (-3) \times 4}{-8 \times (-2)} = K_2 \Rightarrow \mathbf{K_2 = -72.}$$

Para determinar o valor de  $K_3$ , multiplicamos ambos os membros de (2) por  $s + 6$  e em seguida fazemos  $s = -6$ :

$$\left. \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)} \right|_{s=-6} = \left. \frac{K_1(s+6)}{s} \right|_{s=-6} + \left. \frac{K_2(s+6)}{s+8} \right|_{s=-6} + K_3$$

ou seja

$$\frac{96 \times (-1) \times 6}{-6 \times 2} = K_3 \Rightarrow \mathbf{K_3 = 48.}$$

Então, podemos escrever  $F(s)$  da equação (2) como

$$F(s) = \frac{120}{s} + \frac{-72}{s+8} + \frac{48}{s+6}. \quad (3)$$

## 2.2 Transformada Inversa

A partir deste ponto, é possível encontrar a transformada inversa de  $F(s)$  com o auxílio de uma tabela de transformadas de Laplace. Então, a transformada inversa de  $F(s)$  da equação (2) é dada por

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{120}{s} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-72}{s+8} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{48}{s+6} \right\}$$

$$\mathbf{f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = 120 - 72e^{-8t} + 48e^{-6t}} \quad (4)$$

## 3 Raízes Complexas Conjugadas de D(s)

Considere o seguinte exemplo:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}. \quad (5)$$

A função  $F(s)$  da equação (5) é uma função própria. Assim seguimos com o procedimento e calculamos as raízes do fator quadrático de  $D(s)$ .

$$s^2 + 6s + 25 = (s + 3 - j4)(s + 3 + j4)$$

Então, podemos expandir  $F(s)$  da equação (5) como

$$F(s) = \frac{100(s + 3)}{(s + 6)(s^2 + 6s + 25)} = \frac{K_1}{s + 6} + \frac{K_2}{s + 3 - j4} + \frac{K_3}{s + 3 + j4}. \quad (6)$$

### 3.1 Cálculo dos Resíduos

A determinação dos resíduos segue o procedimento discutido anteriormente.

Para determinar o valor de  $K_1$ , multiplicamos ambos os membros de (6) por  $s + 6$  e em seguida fazemos  $s = -6$ :

$$\left. \frac{100(s + 3)}{(s^2 + 6s + 25)} \right|_{s=-6} = K_1 + \left. \frac{K_2(s + 6)}{s + 3 - j4} \right|_{s=-6} + \left. \frac{K_3(s + 6)}{s + 3 + j4} \right|_{s=-6}$$

ou seja

$$\frac{100 \times (-3)}{25} = K_1 \Rightarrow \mathbf{K_1 = -12}.$$

Para determinar o valor de  $K_2$ , multiplicamos ambos os membros de (6) por  $s + 3 - j4$  e em seguida fazemos  $s = -3 + j4$ :

$$\left. \frac{100(s + 3)}{(s + 6)(s + 3 + j4)} \right|_{s=-3+j4} = \left. \frac{K_1(s + 3 - j4)}{s + 6} \right|_{s=-3+j4} + K_2 + \left. \frac{K_3(s + 3 - j4)}{s + 3 + j4} \right|_{s=-3+j4}$$

ou seja

$$\frac{100 \times j4}{(3 + j4) \times j8} = K_2 \Rightarrow \mathbf{K_2 = 6 - j8 = 10e^{-j53.13^\circ}}.$$

Para determinar o valor de  $K_3$ , multiplicamos ambos os membros de (6) por  $s + 3 + j4$  e em seguida fazemos  $s = -3 - j4$ :

$$\left. \frac{100(s + 3)}{(s + 6)(s + 3 - j4)} \right|_{s=-3-j4} = \left. \frac{K_1(s + 3 + j4)}{s + 6} \right|_{s=-3-j4} + \left. \frac{K_2(s + 3 + j4)}{s + 3 + j4} \right|_{s=-3-j4} + K_3$$

ou seja

$$\frac{100 \times (-j4)}{(3 - j4) \times (-j8)} = K_3 \Rightarrow \mathbf{K_3 = 6 + j8 = 10e^{j53.13^\circ}}.$$

Então, podemos escrever  $F(s)$  da equação (6) como

$$F(s) = \frac{-12}{s + 6} + \frac{10\angle -53.13^\circ}{s + 3 - j4} + \frac{10\angle 53.13^\circ}{s + 3 + j4}. \quad (7)$$

Lembrando que  $10e^{-j53.13^\circ} \equiv 10\angle -53.13^\circ$ .

### 3.2 Transformada Inversa

A partir deste ponto, é possível encontrar a transformada inversa de  $F(s)$  com o auxílio de uma tabela de transformadas de Laplace. Então, a transformada inversa de  $F(s)$  da equação (6) é dada por

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-12}{s+6} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{10\angle -53.13^\circ}{s+3-j4} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{10\angle 53.13^\circ}{s+3+j4} \right\}$$
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = -12e^{-6t} + 10e^{-j53.13^\circ} e^{-(3-j4)t} + 10e^{j53.13^\circ} e^{-(3+j4)t} \quad (8)$$

Usando identidades trigonométricas podemos simplificar a equação (8). Esta então adquire a seguinte forma:

$$f(t) = -12e^{-6t} + 20e^{-3t} \cos(4t - 53.13^\circ) \quad (9)$$

## 4 Raízes Reais Múltiplas de $D(s)$

Para determinarmos os coeficientes (resíduos) associados aos termos gerados por uma raiz repetida de multiplicidade  $r$ , multiplicamos os dois membros da equação expandida pela raiz elevada à potência  $r$ . Determinamos o valor do coeficiente do termo que contém o denominador elevado à potência  $r$  substituindo  $s$  pelo valor da raiz nos dois membros da equação expandida. Para determinar os outros  $(r-1)$  coeficientes, diferenciamos ambos os membros da equação expandida  $(r-1)$  vezes. Depois de cada diferenciação, substituímos  $s$  pelo valor da raiz, como anteriormente.

Considere o seguinte exemplo:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{180(s+30)}{s(s+5)(s+3)^2}. \quad (10)$$

Para esta função,  $D(s)$  apresenta uma raiz em  $s = -3$  de multiplicidade 2.

Então, podemos expandir  $F(s)$  da equação (10) como

$$F(s) = \frac{180(s+30)}{s(s+5)(s+3)^2} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+5} + \frac{K_3}{(s+3)^2} + \frac{K_4}{s+3}. \quad (11)$$

### 4.1 Cálculo dos Resíduos

Os resíduos  $K_1$  e  $K_2$  são obtidos utilizando o método discutido anteriormente.

Para determinar o valor de  $K_1$ , multiplicamos ambos os membros de (11) por  $s$  e em seguida fazemos  $s = 0$ :

$$\left. \frac{180(s+30)}{(s+5)(s+3)^2} \right|_{s=0} = K_1 + \left. \frac{K_2 s}{s+5} \right|_{s=0} + \left. \frac{K_3 s}{(s+3)^2} \right|_{s=0} + \left. \frac{K_4 s}{s+3} \right|_{s=0}$$

ou seja

$$\frac{180 \times 30}{5 \times 9} = K_1 \Rightarrow \mathbf{K_1 = 120}.$$

Para determinar o valor de  $K_2$ , multiplicamos ambos os membros de (11) por  $s + 5$  e em seguida fazemos  $s = -5$ :

$$\left. \frac{180(s+30)}{s(s+3)^2} \right|_{s=-5} = \left. \frac{K_1(s+5)}{s} \right|_{s=-5} + K_2 + \left. \frac{K_3(s+5)}{(s+3)^2} \right|_{s=-5} + \left. \frac{K_4(s+5)}{s+3} \right|_{s=-5}$$

ou seja

$$\frac{180 \times 25}{(-5) \times 4} = K_2 \Rightarrow \mathbf{K_2 = -225}.$$

Para determinar o valor de  $K_3$ , multiplicamos ambos os membros de (11) por  $(s+3)^2$  e em seguida fazemos  $s = -3$ :

$$\left. \frac{180(s+30)}{s(s+5)} \right|_{s=-3} = \left. \frac{K_1(s+3)^2}{s} \right|_{s=-3} + \left. \frac{K_2(s+3)^2}{s+5} \right|_{s=-3} + K_3 + K_4(s+3)|_{s=-3}$$

ou seja

$$\frac{180 \times 27}{(-3) \times 2} = K_3 \Rightarrow \mathbf{K_3 = -810}.$$

Para determinar o valor de  $K_4$ , multiplicamos ambos os membros de (11) por  $(s+3)^2$ , diferenciamos ambos os membros em relação a  $s$  e em seguida fazemos  $s = -3$ :

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{180(s+30)}{s(s+5)} \right]_{s=-3} = \frac{d}{ds} \left[ \frac{K_1(s+3)^2}{s} \right]_{s=-3} + \frac{d}{ds} \left[ \frac{K_2(s+3)^2}{s+5} \right]_{s=-3} + \frac{d}{ds} [K_3]_{s=-3} + \frac{d}{ds} [K_4(s+3)]_{s=-3}$$

ou seja

$$180 \left[ \frac{s(s+5) - (s+30)(2s+5)}{s^2(s+5)^2} \right]_{s=-3} = K_4$$

Substituindo valores,

$$180 \times \left[ \frac{(-3) \times 2 - 27 \times -1}{9 \times 4} \right] = K_4 \Rightarrow \mathbf{K_4 = 105}.$$

Então, podemos escrever  $F(s)$  da equação (11) como

$$F(s) = \frac{120}{s} - \frac{225}{s+5} - \frac{810}{(s+3)^2} + \frac{105}{s+3}. \quad (12)$$

## 4.2 Transformada Inversa

A partir deste ponto, é possível encontrar a transformada inversa de  $F(s)$  com o auxílio de uma tabela de transformadas de Laplace. Então, a transformada inversa de  $F(s)$  da equação (10) é dada por

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{180(s+30)}{s(s+5)(s+3)^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{120}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{225}{s+5} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{810}{(s+3)^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{105}{s+3} \right\}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = 120 - 225e^{-5t} - 810te^{-3t} + 105e^{-3t}. \quad (13)$$