



Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina
Gerência Educacional de Eletrônica



Prof. Fernando Luiz Rosa Mussoi

Terceira Edição

Florianópolis – Março, 2006.

SINAIS SENOIDAIS: TENSÃO E CORRENTE ALTERNADAS**Prof. Fernando Luiz Rosa Mussoi****Versão 3.0 – 17 de março de 2006*****NOTA DO AUTOR***

Esta apostila é um material de apoio didático utilizado pelo autor nas suas aulas das disciplinas ministradas na Gerência Educacional de Eletrônica do Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina (CEFET/SC).

Este material não tem a pretensão de esgotar, tampouco inovar o tratamento do assunto por ele abordado. Tem por objetivo facilitar a dinâmica de aula, com expressivos ganhos de tempo, além de dar uma primeira orientação e compreensão aos alunos sobre o assunto abordado.

Este trabalho foi construído com base nas referências bibliográficas, citadas ao longo do texto, nas notas de aula e na experiência do autor na abordagem do assunto com os seus alunos.

Em se tratando de um material didático elaborado por um professor de uma Instituição Pública de Ensino, são permitidos o uso e a reprodução do texto, desde que devidamente citada a fonte.

O aluno deve desenvolver o hábito de consultar, estudar e, se possível, adquirir a Bibliografia Referenciada original para melhores resultados no processo de aprendizagem.

Quaisquer contribuições, correções e críticas construtivas a este trabalho serão bem-vindas pelo autor.

Agradeço a todos aqueles que fizeram uso deste material, em especial aos meus alunos, razão deste material e do meu trabalho.

Prof. Fernando Luiz Rosa Mussoi

mussoi@cefetsc.edu.br

Índice

NOTA DO AUTOR	2
1. TENSÃO E CORRENTE ALTERNADAS SENOIDAIS	6
2. GERAÇÃO DE CORRENTE ALTERNADA	7
2.1. INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA.....	7
2.2 - PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DO GERADOR DE CORRENTE ALTERNADA.....	9
2.3 – TENSÃO E FREQUÊNCIA DO GERADOR.....	13
2.4 - GERADORES DE CORRENTE ALTERNADA.....	16
3. PARÂMETROS DA FORMA DE ONDA DA TENSÃO E DA CORRENTE ALTERNADA SENOIDAL	20
3.1. VALOR DE PICO:.....	20
3.2. PERÍODO (T):.....	21
3.3. FREQUÊNCIA (F):.....	21
3.4. FREQUÊNCIA ANGULAR OU VELOCIDADE ANGULAR (ω):.....	22
3.5. FUNÇÃO MATEMÁTICA DA TENSÃO E DA CORRENTE ALTERNADA SENOIDAL.....	24
3.5.1. <i>Tensão Instantânea</i> :.....	25
3.5.2. <i>Corrente Instantânea</i> :.....	27
3.6. VALOR MÉDIO.....	28
3.7. VALOR EFICAZ.....	30
3.8. FATOR DE FORMA.....	33
3.9. FASE INICIAL E DEFASAGEM ANGULAR.....	33
3.10. OSCILOSCÓPIO.....	36
3.11. EXERCÍCIOS:.....	37
4. NÚMEROS COMPLEXOS	41
4.1. PLANO CARTESIANO COMPLEXO.....	41
4.2. FORMA RETANGULAR OU CARTESIANA.....	43
4.3. FORMA POLAR.....	45
4.4. CONVERSÃO ENTRE FORMAS.....	46
4.4.1. <i>Conversão de Retangular para Polar</i>	46
4.4.2. <i>Conversão de Polar para Retangular</i>	47
4.5. OPERAÇÕES MATEMÁTICAS COM NÚMEROS COMPLEXOS.....	48
4.5.1. <i>Conjugado Complexo</i>	48
4.5.2. <i>Recíproco ou Inverso de um número complexo</i>	49
4.5.3. <i>Adição e Subtração de números complexos</i>	49
4.5.4. <i>Multipliação de números complexos</i>	49
4.5.5. <i>Divisão de números complexos</i>	50
4.5.6. <i>Potenciação de números complexos</i>	51
4.6. EXERCÍCIOS.....	51
5. REPRESENTAÇÃO FASORIAL DE SINAIS SENOIDAIS	54
5.1 INTRODUÇÃO.....	54
5.2. FASOR.....	56
5.3. REPRESENTAÇÃO FASORIAL COM NÚMEROS COMPLEXOS.....	60
5.4. OPERAÇÕES MATEMÁTICAS COM FASORES E DIAGRAMAS FASORIAIS.....	63
5.5. TABELA RESUMO.....	66
5.6. EXERCÍCIOS:.....	67
6. RELAÇÕES ENTRE TENSÃO E CORRENTE ALTERNADAS NOS ELEMENTOS PASSIVOS DE CIRCUITOS	70

6.1. RESISTOR EM CORRENTE ALTERNADA.....	70
6.1.1. Exercícios:.....	75
6.2. CAPACITOR EM CORRENTE ALTERNADA.....	75
6.2.1. Reatância Capacitiva X_C :	80
6.2.2. Lei de Ohm para o Capacitor em Corrente Alternada.....	81
6.2.3. Resposta em frequência para o Capacitor	84
6.2.4. Modelo do Capacitor Real	85
6.2.5. Exercícios:.....	85
6.3. INDUTOR EM CORRENTE ALTERNADA.....	86
6.3.1. Reatância Indutiva X_L :	90
6.3.2. Lei de Ohm para o Indutor em corrente alternada	92
6.3.3. Resposta em frequência para o Indutor	94
6.3.4. Modelo do Indutor Real	95
6.3.3. Exercícios:.....	96
6.4. IMPEDÂNCIA	96
6.4.1. Diagrama de Impedâncias e Triângulo de Impedâncias	101
6.4.2. Associação de Impedâncias:	104
6.4.3. Tabelas-resumo	106
6.4.4. Exercícios	108
6.5. ADMITÂNCIA.....	108
6.5.1. Associações de Admitâncias.....	109
6.5.2. Diagrama de Admitâncias.....	110
6.6. ANÁLISE DE CIRCUITOS DE CORRENTE ALTERNADA	111
6.6.1. Análise de Circuitos RC	111
6.6.2. Análise de Circuitos RL.....	114
6.6.3. Análise de Circuitos RLC	116
6.6.4. Exercícios:.....	122
7. POTÊNCIA E ENERGIA ELÉTRICA EM CORRENTE ALTERNADA.....	124
7.1. POTÊNCIA INSTANTÂNEA	124
7.2. POTÊNCIA MÉDIA OU POTÊNCIA ATIVA	127
7.3. ESTUDO DA POTÊNCIA NO RESISTOR, NO INDUTOR E NO CAPACITOR.	129
7.3.1. Potência no Resistor.....	129
7.3.2 - Potência no Indutor Ideal	132
7.3.3. Potência no Capacitor Ideal	135
7.3.4. Potencia na Impedância de um circuito misto	138
7.4. POTÊNCIA APARENTE E TRIÂNGULO DE POTÊNCIAS.....	140
7.4.1. Triângulo de Potências	141
7.5. FATOR DE POTÊNCIA E ENERGIA	143
7.5.1. Energia Elétrica	144
7.6 - NOTAÇÃO COMPLEXA DA POTÊNCIA	144
7.7. RELAÇÕES ENTRE P E Q E OS ELEMENTOS PASSIVOS R, L E C.....	146
7.8. CORREÇÃO DO FATOR DE POTÊNCIA:.....	150
7.9. EXERCÍCIOS	153
8. EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS.....	156
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:.....	170
ANEXOS	171
A.1. RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	172
A.2. DERIVADA.....	173
A.3. MEDIÇÃO DA DEFASAGEM USANDO OSCILOSCÓPIO	175
A.4. ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS.....	176
A.5. SÉRIES DE FOURIER.....	177

A.6. TEOREMA DA MÁXIMA TRANSFERÊNCIA DE POTÊNCIA.....	182
A.6.1. <i>Transferência de Potência em Circuitos de Corrente Contínua</i>	182
A.6.2. <i>Transferência de Potência em Circuitos de Corrente Alternada</i>	182
A.6.3. <i>Exercícios Propostos:</i>	183
A.8. FATOR DE DESLOCAMENTO E TAXA DE DISTORÇÃO HARMÔNICA	184
A9. INFORMAÇÕES RELEVANTES	185

1. TENSÃO E CORRENTE ALTERNADAS SENOIDAIS

Uma forma de onda de um sinal de tensão ou corrente alternada é aquela onde a **intensidade e a polaridade** alteram-se ao longo do tempo. Em geral são sinais periódicos como as formas de onda apresentadas na figura 1.1

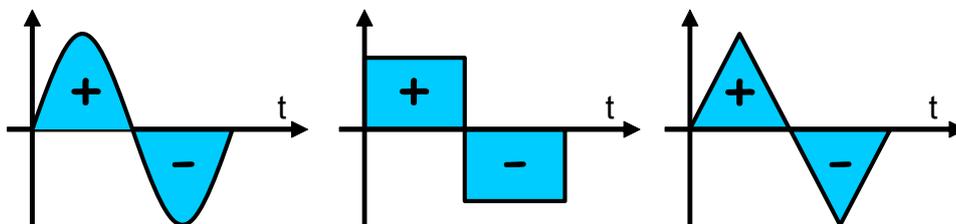


Figura 1.1 – formas de onda alternadas e periódicas

Uma **Corrente Alternada (I_{CA})** é aquela que inverte, periodicamente, o **sentido** no qual está circulando. Ela também varia a intensidade continuamente no tempo. Uma **Tensão Alternada (V_{CA})** é aquela que inverte, periodicamente, a **polaridade** da tensão. Já **Tensão ou Corrente Alternada Senoidal** é aquela cuja forma de onda é representada por uma senóide. Dizemos que é um sinal senoidal.

A forma de onda periódica mais importante e de maior interesse é a alternada senoidal de tensão e de corrente, porque a energia gerada nas usinas das concessionárias e a maioria dos equipamentos usam tensão e corrente alternadas senoidais.

A maior parte da energia elétrica consumida é gerada e distribuída na forma de tensão e corrente alternadas para os consumidores que são as residências, o comércio e, principalmente, as indústrias.

A principal razão pela qual a energia elétrica gerada e distribuída em grande escala ser em tensão e corrente alternadas é que ela apresenta uma facilidade tanto na geração como na transformação dos níveis de tensão (elevação ou redução). Para transportar a energia a longas distâncias é necessário elevar a tensão a níveis que chegam a 750kV, para reduzir as perdas no transporte (principalmente por Efeito Joule). Nos centros de consumo a tensão é novamente reduzida e distribuída aos consumidores.

Os motores de corrente alternada são construtivamente menos complexos que os motores de corrente contínua. Isto é uma grande vantagem pois, reduz custos e cuidados com a manutenção. Por isso são os mais baratos e os mais usados nos equipamentos.

Outra importante razão é a característica típica de comportamento dos circuitos elétricos e seus elementos passivos (R, L e C) quando submetidos a sinais senoidais. O tratamento matemático permite que os mesmos teoremas de análise de circuitos de corrente contínua (CC) possam ser aplicados à análise de circuitos com sinais alternados senoidais.

Além disso, os sinais senoidais de tensão e de corrente são muito estudados porque são, em muitos casos, a base para vários outros sinais. Isto quer dizer que muitos sinais podem ser analisados pela combinação de mais de um sinal senoidal.

O objetivo desta apostila é apresentar o processo de geração da corrente alternada senoidal e especificar as suas características, parâmetros e terminologias, bem como processos matemáticos para análise do comportamento dos elementos passivos (resistor, capacitor e indutor) em circuitos de corrente alternada senoidal.

2. GERAÇÃO DE CORRENTE ALTERNADA

No estudo do Eletromagnetismo já foram vistos os princípios da Indução Eletromagnética. Para entender a produção de uma onda (sinal) senoidal devemos conhecer bem os princípios das tensões e correntes induzidas:

2.1. INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

Quando a região onde um circuito elétrico se encontra apresenta uma variação de fluxo magnético, surge nesse circuito, uma corrente elétrica. Este fenômeno é chamado de indução eletromagnética.

Esta corrente induzida circula no circuito devido à uma diferença de potencial (tensão), chamada de força eletromotriz induzida (FEM), ou simplesmente, tensão induzida.

A indução eletromagnética é regida por duas leis: **Lei de Lenz** e **Lei de Faraday**, já estudadas.

A **Lei de Faraday** diz que a Fem (tensão) induzida média em um circuito é igual ao resultado da divisão da variação do fluxo magnético numa bobina com N espiras pelo intervalo de tempo em que ocorre, com sinal trocado. Ou seja, quanto mais o fluxo variar num intervalo de tempo, tanto maior será a tensão induzida.

$$e = \frac{-N \cdot \Delta\Phi}{\Delta t}$$

onde:

e – força eletromotriz induzida (tensão induzida) [V]

$\Delta\Phi/\Delta t$ – taxa de variação do fluxo magnético no tempo [Wb/s]

N – número de espiras.

A **Lei de Lenz** diz que o sentido da corrente induzida é tal que origina um fluxo magnético induzido, que se opõe à variação do fluxo magnético indutor.

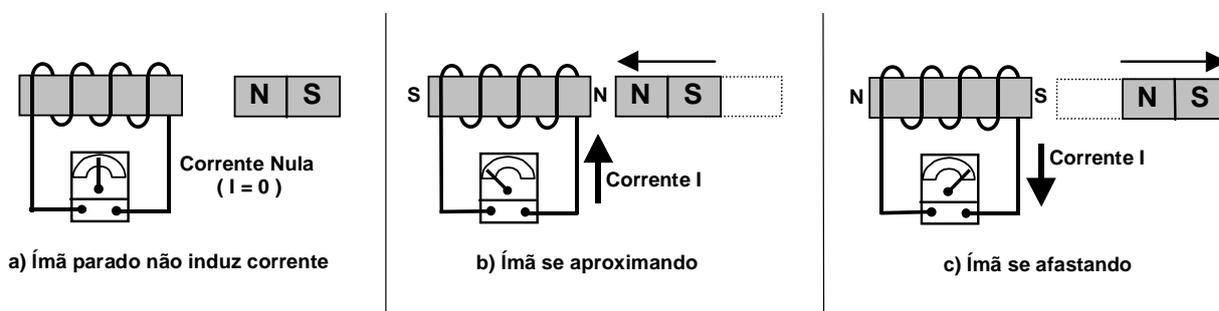


Figura 2.1.1 – Indução Eletromagnética

Por exemplo, na figura 2.1.1 a aproximação do ímã provoca um aumento do fluxo magnético perto da bobina. Conseqüentemente começa a circular, na bobina, uma corrente que cria um campo magnético com polaridade inversa ao do ímã. O campo criado tenta impedir

a aproximação do ímã, tenta parar o ímã, para manter o fluxo magnético constante (variação de fluxo nula). Quando o ímã se afasta, o efeito é contrário e a corrente induzida tem o seu sentido alternado.

Um condutor se movimentando num campo magnético também produz variação de fluxo magnético e sofre, conseqüentemente, indução magnética de corrente.

Há três condições fundamentais que devem existir antes que uma tensão possa ser produzida por magnetismo.

- Deve haver um CONDUTOR no qual a tensão será induzida.
- Deve haver um CAMPO MAGNÉTICO na vizinhança do condutor.
- Deve haver movimento relativo entre o campo e o condutor.

De acordo com estas condições, quando o condutor (ou condutores) se MOVER através de um campo magnético de maneira que as linhas de campo o atravessem, elétrons DENTRO DO CONDUTOR serão estimulados em uma direção ou outra. Assim, uma força eletromotriz, ou tensão elétrica, é induzida (criada).

Sabemos que:

$$\phi = B \cdot A \cdot \text{sen}\theta$$

onde:

ϕ - fluxo magnético [Wb]

B – intensidade do campo magnético [T]

A – área do condutor [m²]

θ - ângulo de incidência das linhas de campo no condutor [° ou rad]

Ou seja, o fluxo magnético depende da intensidade do campo magnético, da área do condutor atingida pelas linhas do campo magnético e do ângulo em que estas linhas atingem o condutor.

O sentido da corrente induzida num condutor em movimento dentro de um campo magnético pode ser dado pela Regra da Mão Direita (Regra de Fleming), como indica a figura 2.1.2.

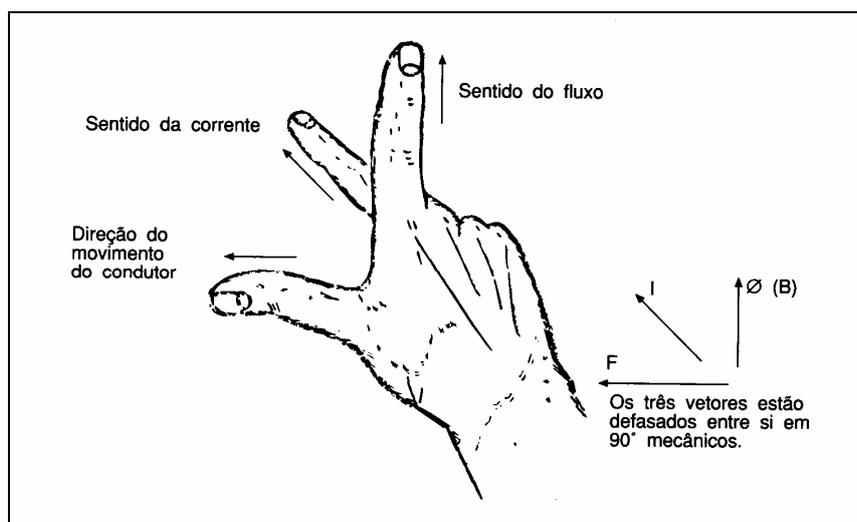


Figura 2.1.2 – Determinação do sentido da corrente induzida com o uso da Regra da Mão Direita [2].

As figuras 2.1.3 e 2.1.4 indicam algumas situações de indução de corrente num condutor e o seu sentido, em função da polaridade magnética e do sentido do movimento do condutor.

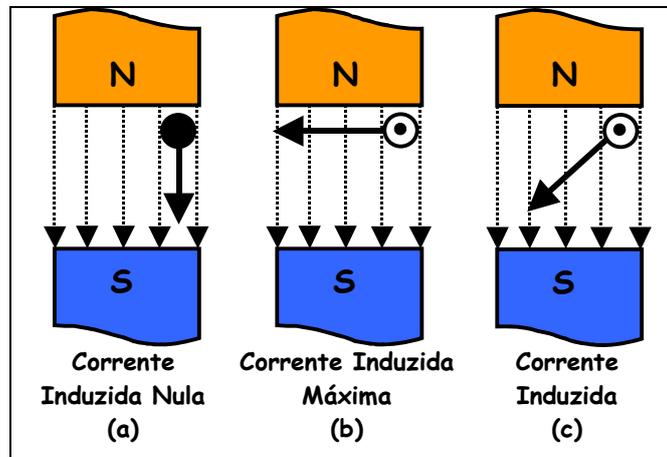


Figura 2.1.3 – Movimento de um condutor dentro de um campo magnético. A amplitude da corrente induzida depende do ângulo no qual o condutor corta as linhas de fluxo [2].

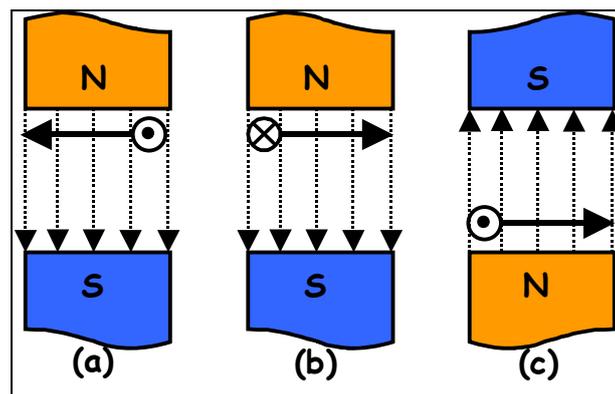


Figura 2.1.4 – Mudar a direção do movimento ou a polaridade do campo muda o sentido da corrente induzida [2].

2.2 - PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DO GERADOR DE CORRENTE ALTERNADA.

Um gerador de corrente alternada funciona com base na indução de força eletromotriz num condutor em movimento dentro de um campo magnético. Para entender o seu funcionamento considere-se o esquema da figura 2.2.1, onde uma espira gira dentro de um campo magnético, gerando uma tensão (FEM) e uma corrente induzidas.

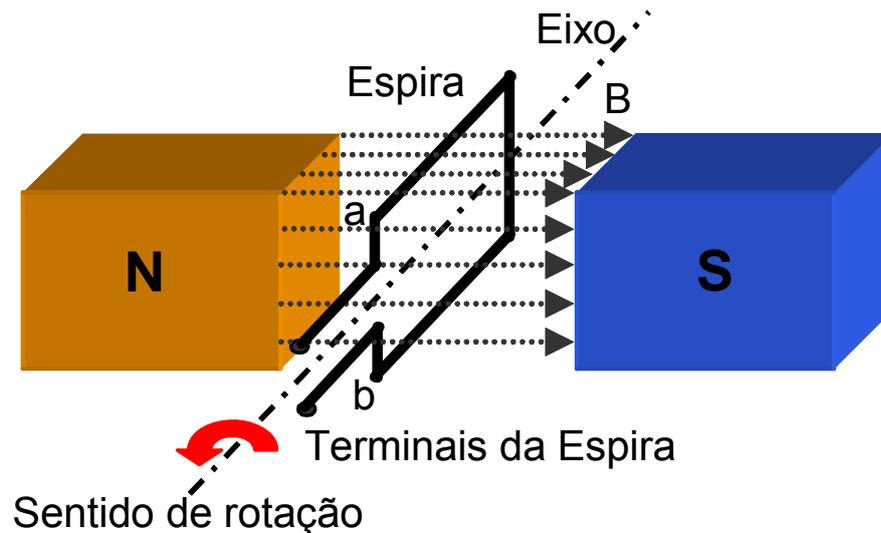


Figura 2.2.1 – Gerador de Corrente Alternada Elementar: espira girando num campo magnético

A figura 2.2.2(a) ilustra, passo a passo, a indução de uma corrente na espira do gerador de corrente alternada elementar da figura 2.2.1.

Em t_1 os condutores a e b estão se movimentando paralelamente ao fluxo magnético (com sentidos opostos). Como nenhuma linha de fluxo é cortada $\theta=0^\circ=180^\circ$, nenhuma tensão ou corrente é induzida.

No instante t_2 , o movimento dos condutores já corta as linhas de fluxo magnético em um determinado ângulo θ e uma tensão é induzida e esta proporciona uma corrente induzida com o sentido indicado, dado pela regra da mão direita.

No instante t_3 o movimento dos condutores corta as linhas de fluxo perpendicularmente (ângulo de 90°) e a variação do fluxo é máxima. A tensão induzida é máxima e, portanto, há o pico de corrente induzida.

Em t_4 , o movimento dos condutores corta as linhas de fluxo magnético em um determinado ângulo e uma tensão menor é induzida. Como o ângulo é complementar a θ_2 a tensão induzida é igual a do instante t_2 .

Em t_5 os condutores a e b estão novamente se movimentando paralelamente ao fluxo magnético (com sentidos opostos) e nenhuma tensão ou corrente é induzida.

Neste ponto, a primeira meia volta da espira produziu a forma de onda de corrente induzida apresentada na figura 2.2.2(b). O eixo vertical indica a intensidade da corrente (ou da tensão) induzida em cada instante. O eixo horizontal indica os instantes de tempo ou o ângulo do movimento da espira no campo magnético.

Como:

$$\phi = B \cdot A \cdot \text{sen}\theta$$

com a variação do ângulo devido ao movimento de giro da espira no campo magnético, o fluxo ϕ tem uma variação senoidal e, portanto, como a tensão induzida depende da variação do fluxo, ela assumirá um comportamento também senoidal.

Como a tensão e a corrente induzidas dependem da variação do fluxo e este varia de acordo com o seno do ângulo de incidência das linhas no condutor da espira ($\phi = B.A.\text{sen}\theta$) devido ao movimento giratório da espira, a **forma de onda** resultante é **periódica** a cada volta (cíclica) e tem a **forma senoidal**.

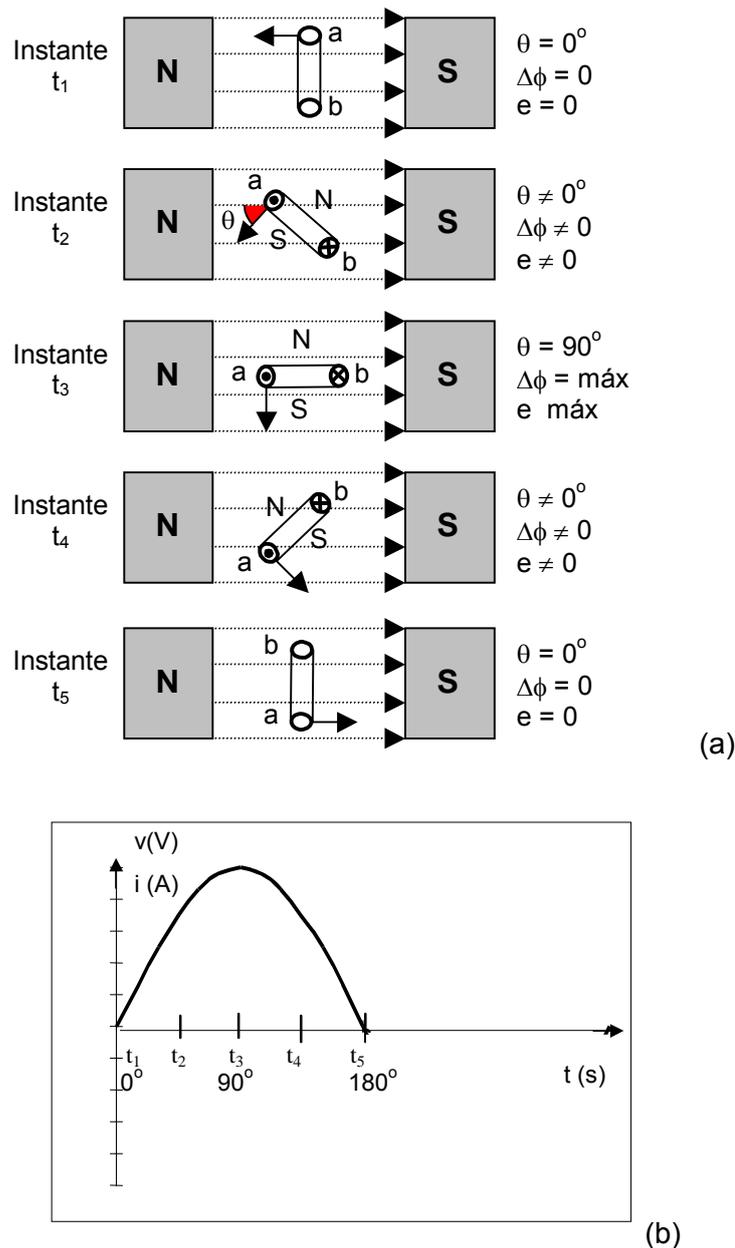


Figura 2.2.2 – Geração de Corrente: (a) primeira meia volta da espira [1]; (b) forma de onda do sinal gerado.

A figura 2.2.3 representa a segunda meia volta da espira. Nota-se que, do instante t_5 para t_6 a direção na qual o condutor corta o fluxo é invertida. Portanto, a polaridade da tensão induzida é invertida e, conseqüentemente, o sentido da corrente é alternado, formando, a partir daí, o semiciclo negativo da forma de onda, pelo mesmo processo anterior.

A figura 2.2.4 indica a forma de onda senoidal produzida pelo giro de 360° (2π rad) de um condutor de uma espira em um campo magnético. O eixo vertical indica a amplitude da tensão (FEM) induzida.

O eixo horizontal pode representar o **tempo** que a forma de onda leva para completar um ciclo inteiro (período). Cada instante de tempo está relacionado com a **posição angular** do condutor no campo magnético. Quando o eixo horizontal indicar diretamente a **posição angular** em graus, chamamos de **ângulo elétrico**. A vantagem de se indicar o eixo horizontal em graus em vez de unidades de tempo é que os graus elétricos independem da velocidade com que a espira gira no campo magnético (e conseqüentemente da frequência e do período).

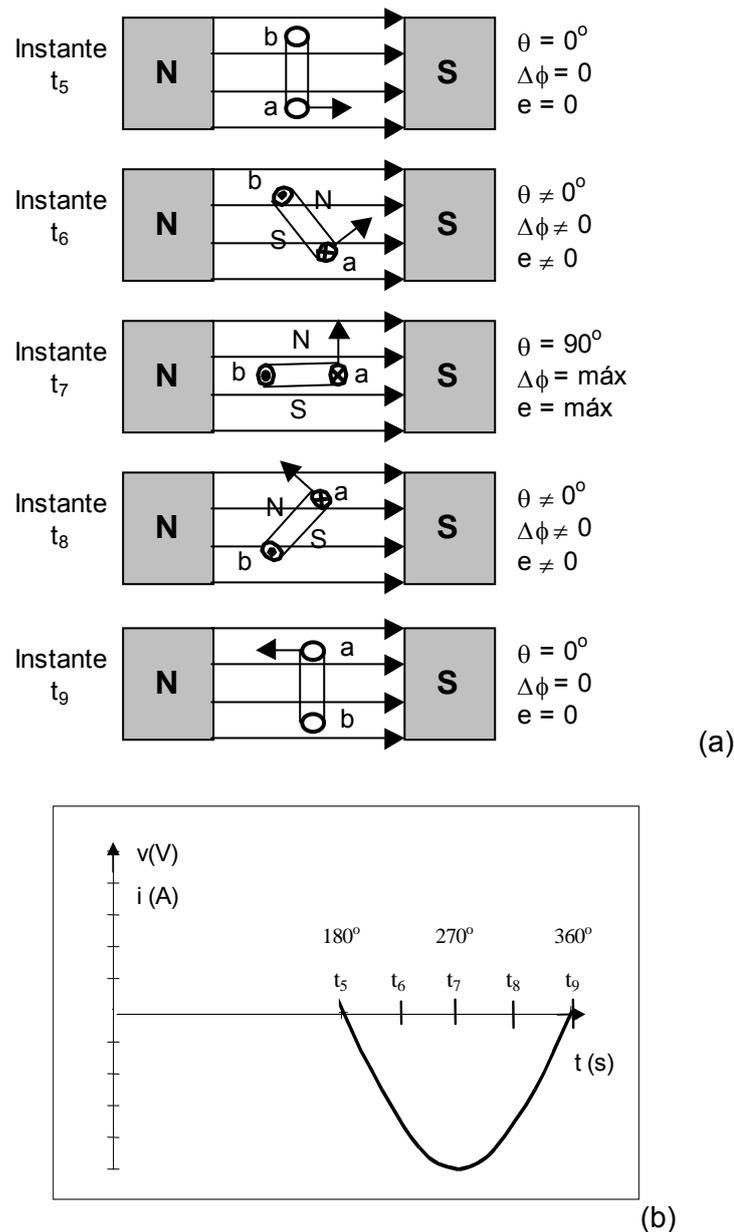


Figura 2.2.3 – Geração de Corrente: (a) segunda meia volta da espira [1]; (b) forma de onda do sinal gerado.

A corrente alternada resultante do processo de indução magnética, no gerador estudado, tem a forma senoidal, isto é, a corrente varia no tempo periodicamente tanto em intensidade como em sentido, a cada 360° , como indica a figura 2.2.5. O mesmo ocorre para a FEM induzida: uma tensão que varia periodicamente, em intensidade e polaridade.

A amplitude da tensão e da corrente induzidas nas bobinas depende:

- do número de espiras das bobinas rotativas;
- da velocidade na qual as bobinas se movimentam;
- da densidade do fluxo do campo magnético.

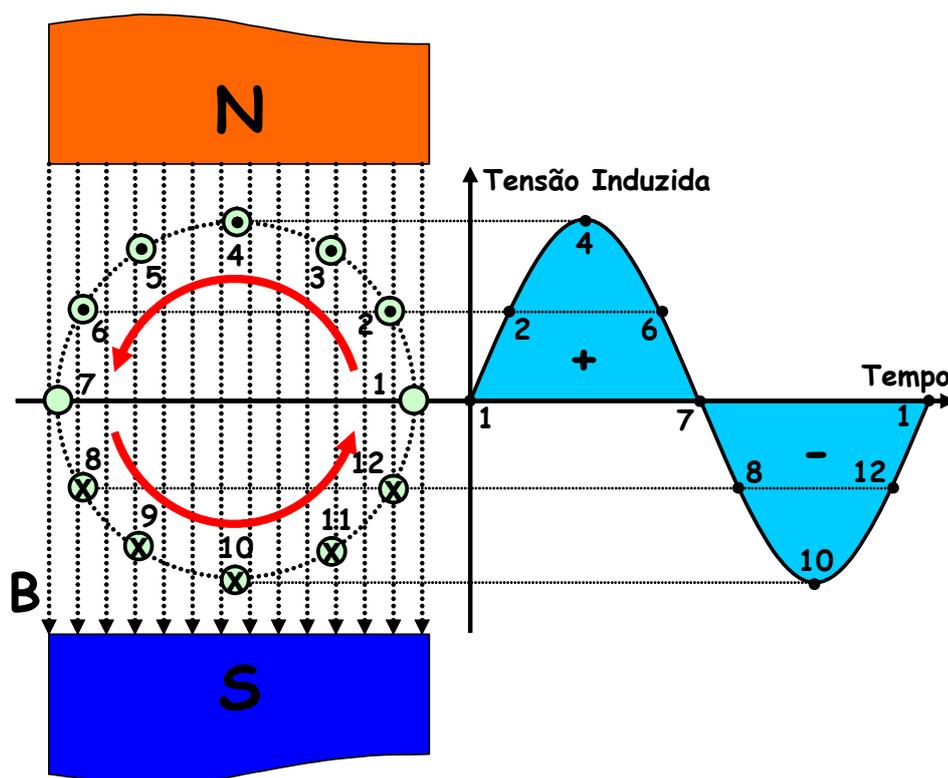


Figura 2.2.4 – Gerando uma onda senoidal através do movimento de rotação de um condutor dentro de um campo magnético [2].

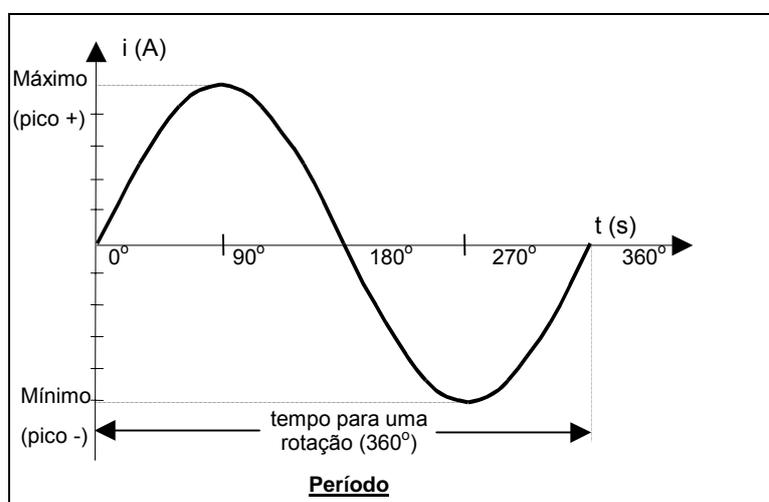


Figura 2.2.5 - Gráfico da corrente produzida pelo gerador.

2.3 – TENSÃO E FREQUÊNCIA DO GERADOR

Observando as figuras 2.2.2 e 2.2.3 podemos concluir que o fluxo magnético na espira varia de um máximo positivo ($+\phi$) em t_3 , a um máximo negativo ($-\phi$) em t_7 , passando por zero durante meia volta da espira no campo magnético. Assim, a amplitude de variação do fluxo magnético na espira em meia volta é dado por:

$$\Delta\phi = +\phi_{\max} - (-\phi_{\max}) = 2\phi$$

Essa variação ocorre durante um dado intervalo de tempo Δt . Considerando a quantidade de rotações por minuto (rpm), temos a relação:

$$\begin{array}{l} \Delta t \quad \quad \quad \text{—} \quad \quad \frac{1}{2} \text{ rotação} \\ 60\text{s (1min)} \quad \text{—} \quad \quad n \text{ rotações} \end{array}$$

assim:

$$\Delta t = \frac{30}{n}$$

No gerador das figuras 2.2.2 e 2.2.3 temos apenas dois pólos magnéticos produzindo um $\Delta\phi = 2\phi$ em meia volta. Se tivermos um número p de pólos teremos:

$$\Delta\phi = p \cdot \phi$$

sendo a força eletromotriz induzida proporcional ao número de espiras

$$e = -N \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

substituindo

$$e = -N \cdot \frac{p \cdot \phi}{\frac{30}{n}}$$

assim

$$e = -N \cdot \frac{p \cdot \phi \cdot n}{30}$$

onde:

e – força eletromotriz (tensão) média induzida [V];

ϕ - fluxo magnético por pólo [Wb];

p – número de pólos;

n – velocidade [rpm];

N – número de espiras

O gerador de dois pólos da figura 2.2.2 e 2.2.3 completa um ciclo a cada rotação. Em cada segundo teremos $n/60$ rotações. Assim:

$$\begin{array}{l} 2 \text{ pólos} \quad \text{—} \quad n/60 \text{ rotações por segundo} \\ p \text{ pólos} \quad \text{—} \quad f \text{ rotações por segundo} \end{array}$$

equacionando, temos:

$$f = \frac{n \cdot p}{120}$$

onde:

f – frequência da tensão induzida em ciclos por segundo, Hertz [Hz];

p – número de pólos;

n – rotação em rpm.

Substituindo esta equação na anterior, temos para a tensão induzida:

$$e = -4 \cdot \phi \cdot f \cdot N$$

A figura 2.3.1 mostra dois geradores com o campo magnético girante no rotor e a armadura fixa no estator. O primeiro apresenta 8 pólos e o segundo 2 pólos. Como ambos giram a mesma velocidade, o gerador de mais pólos produz um sinal de maior freqüência do que o outro. Assim, para uma dada freqüência desejada (como 60Hz, por exemplo), um gerador de mais pólos pode girar a uma velocidade menor.

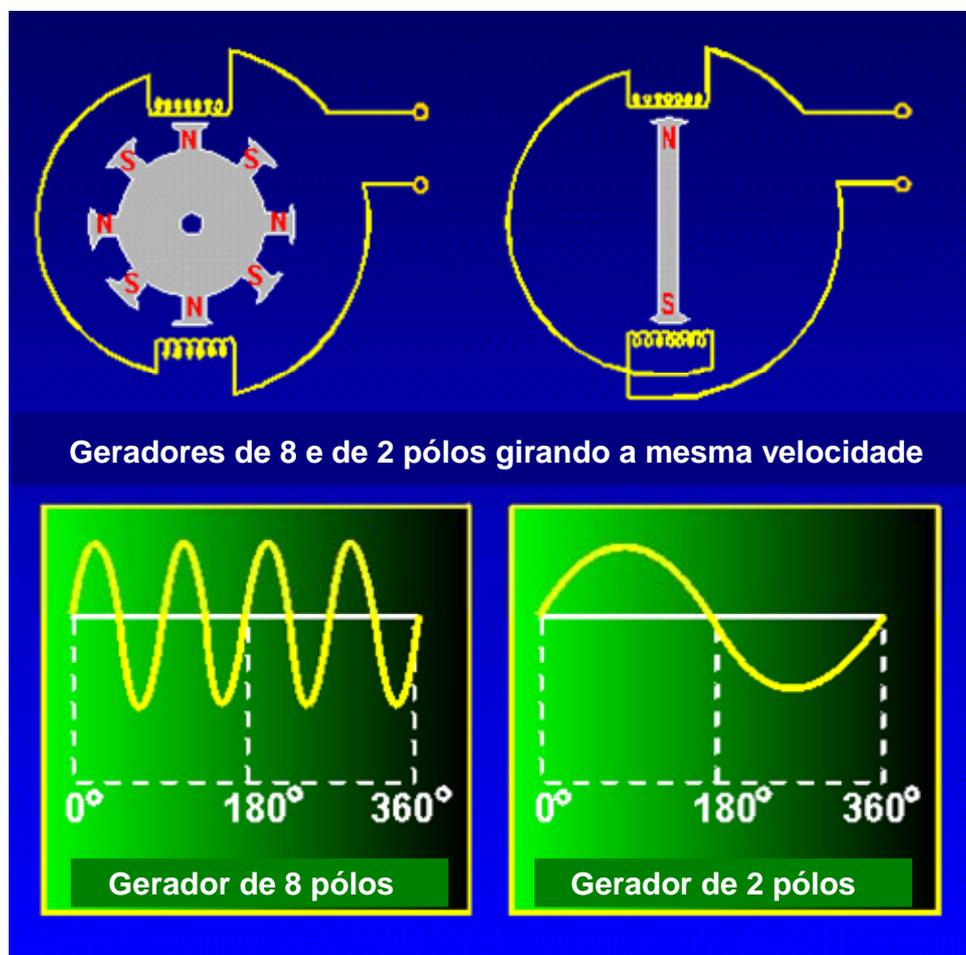


Figura 2.3.1 – Número de pólos magnéticos influencia a freqüência da tensão gerada.

Nos circuitos elétricos, fonte de tensão alternada senoidal e fonte de corrente alternada senoidal são representadas como mostra a figura 2.4.2. Na convenção adotada, a polaridade da tensão e o sentido da corrente indicado se referem ao semiciclo positivo.

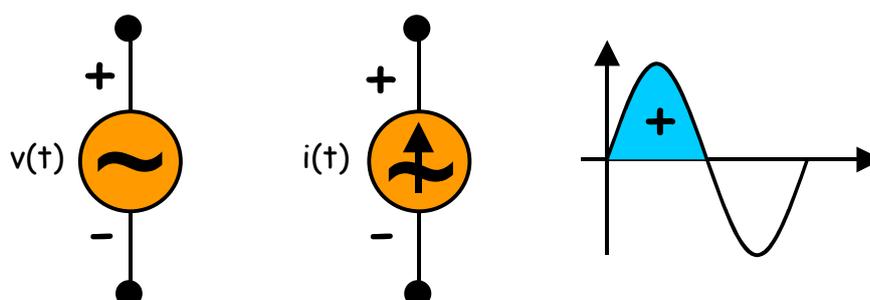


Figura 2.4.2 – símbolo e convenção para polaridade de fontes de tensão e de corrente alternadas senoidais.

2.4 - GERADORES DE CORRENTE ALTERNADA

A figura 2.4.1 apresenta as partes essenciais de um gerador de corrente alternada elementar. É chamado de elementar porque possui apenas uma espira.

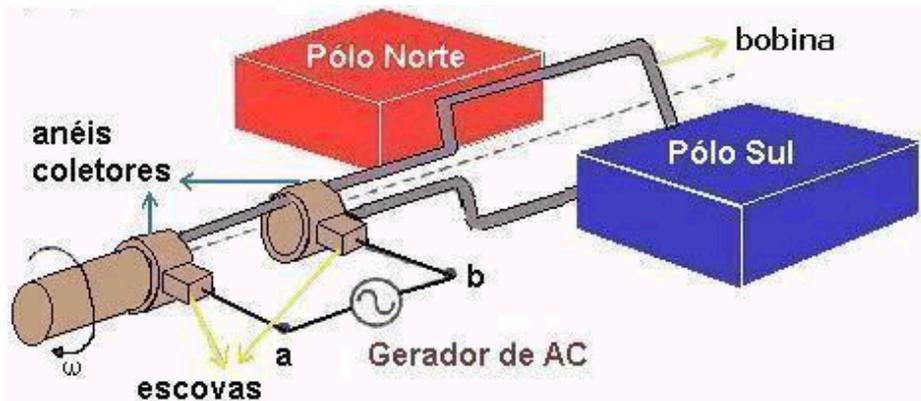


Figura 2.4.1 – Gerador CA. A espira em movimento é conectada à carga através de anéis coletores e escovas [2].

Um gerador real consiste de muitas espiras em série e em paralelo formando conjuntos de bobinas. O conjunto das bobinas num gerador é chamado *enrolamento*, que é montado em torno de um núcleo de aço silício (material ferromagnético) e que constitui a chamada *armadura*, onde é induzida a força eletromotriz (tensão).

O campo magnético produzido no gerador da figura 2.4.1 é criado por um ímã permanente. Nos geradores comerciais, o campo magnético é criado por um eletroímã alimentado por uma fonte de corrente contínua.

O rotor é a parte que gira. O estator é a parte que permanece estacionária. Nos geradores de corrente alternada a armadura pode estar no rotor ou no estator

Nos geradores de corrente alternada de grande potência, encontrados nas usinas, a armadura é fixa no estator e o campo magnético é que gira em torno delas, como mostra a figura 2.4.2 e também a figura 2.3.1. Como há um movimento relativo entre elas, há a indução eletromagnética.

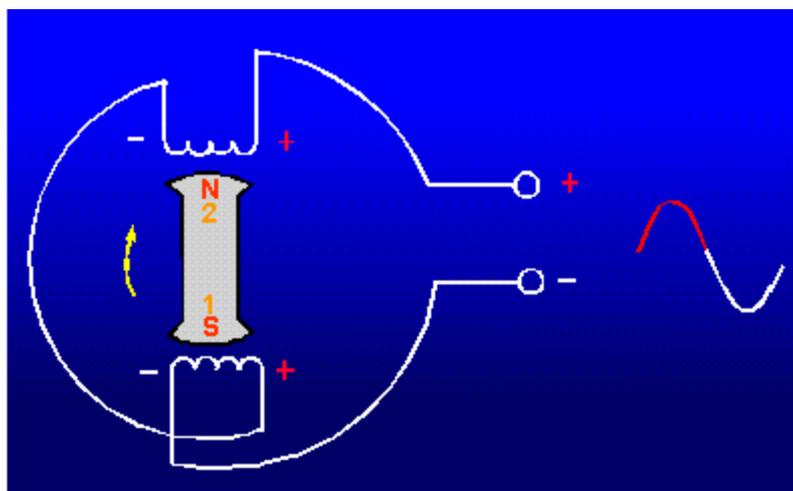


Figura 2.4.2 – Gerador de Corrente Alternada de Pólos Girantes e Armadura Estacionária.

No gerador CA de armadura giratória o sinal CA gerado é levado à carga através de anéis coletores e escovas deslizantes, como mostra a figura 2.4.1. A armadura giratória é encontrada somente em alternadores de baixa potência devido à limitação de corrente nos anéis coletores e escovas.

O gerador CA de campo giratório tem o enrolamento de armadura estacionário e o enrolamento de campo girante no rotor (o campo magnético é criado por bobinas – eletroímãs). A vantagem da armadura estacionária é que a tensão gerada pode ser conectada à carga diretamente, sem necessidade de anéis coletores e escovas. Isso possibilita geração de grandes níveis de tensão e de corrente (alta potência), pois os anéis e escovas só permitem operação em baixas tensões e correntes.

O estator consiste de um núcleo de ferro laminado com os enrolamentos da armadura embutidos neste núcleo, como mostrado na Figura 2.4.3. O núcleo é a armadura do estator.

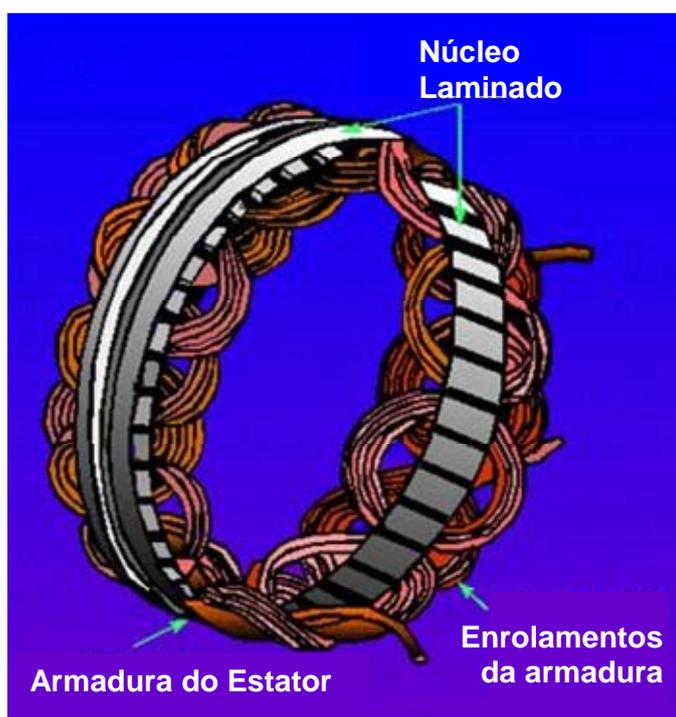


Figura 2.4.3 – Armadura do Estator de um gerador de corrente alternada.

Todos os geradores, grandes ou pequenos, de corrente alternada ou de corrente contínua, requerem uma fonte de potência mecânica para girar seus rotores. Esta fonte de energia mecânica é chamada de fonte primária.

Fontes primárias são divididas em duas classes: para gerador de alta velocidade e baixa velocidade. Turbinas a Vapor e a Gás são fontes primárias de alta velocidade, enquanto máquinas de combustão interna (como motores a explosão), turbinas hidráulicas em quedas de água e turbinas eólicas (hélices) são consideradas fontes primárias de baixa velocidade.

O tipo de fonte primária tem um papel importante no projeto de alternadores, desde que a velocidade à qual o rotor é girado determina certas características de construção do alternador e operação. A figura 2.4.4 mostra uma turbina hidráulica acionando um gerador.

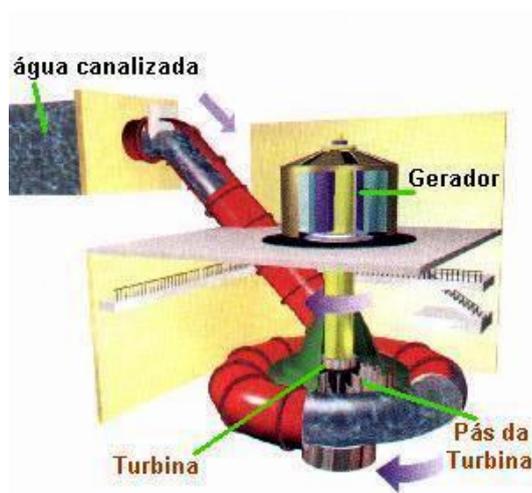


Figura 2.4.4 – Turbina hidráulica acionando mecanicamente o gerador.

Alternadores são avaliados de acordo com a tensão para a qual eles são projetados e pela máxima corrente que são capazes de fornecer. O produto da tensão alternada pela corrente alternada de projeto do gerador fornece a capacidade de potência gerada, cuja unidade é o Volt-Ampère.

A corrente máxima que pode ser fornecida por um alternador depende da máxima perda de calor que ele pode suportar na armadura. Esta perda de calor (que é uma potência elétrica perdida, principalmente por Efeito Joule) age aquecendo os condutores e, se excessiva, destrói o seu isolamento, podendo causar má operação ou curto-circuito. Sistemas de refrigeração são incorporados em grandes geradores para limitar o aquecimento.

Quando um alternador sai da fábrica, este já é destinado para um trabalho muito específico. A velocidade para a qual é projetado para girar, a tensão que produzirá, os limites de corrente, e outras características de operação são conhecidas. Esta informação é normalmente estampada em uma placa de especificações para que o usuário conheça suas características.

A figura 2.4.5 mostra dois tipos de rotores para geradores de pólos girantes e armadura estacionária. O primeiro é adequado para turbinas de alta velocidade como aquelas acionadas por vapor ou gás. A segunda é para turbinas de baixa velocidade como aquelas acionadas por turbinas hidráulicas e motores de explosão.

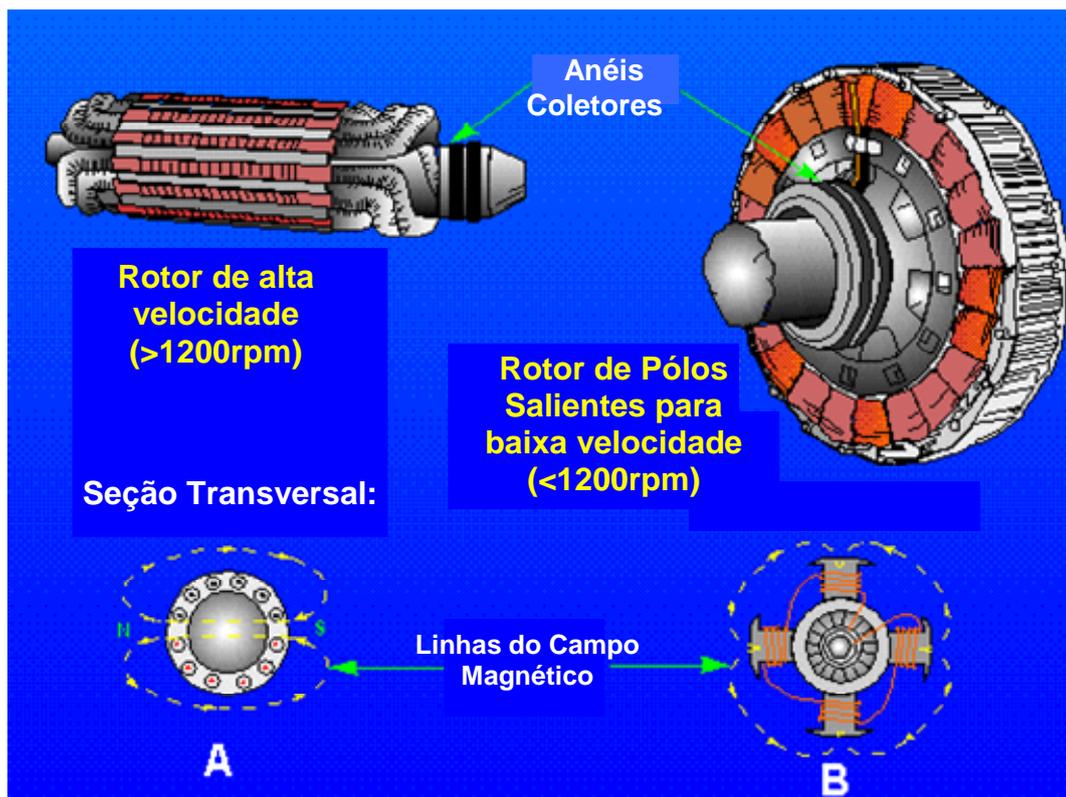


Figura 2.4.5 – Dois tipos de rotores: (a) para turbinas de alta velocidade e (b) para turbinas de baixa velocidade.

3. PARÂMETROS DA FORMA DE ONDA DA TENSÃO E DA CORRENTE ALTERNADA SENOIDAL

Para conhecermos corretamente um sinal de tensão e de corrente alternadas e senoidais, precisamos estudar os parâmetros da forma de onda senoidal. Alguns destes parâmetros têm significado geral (para a matemática e a física, por exemplo), mas quando estudados em eletricidade têm sentido específico.

A **Forma de Onda** é a curva descrita por uma quantidade (como tensão ou corrente) em função de alguma variável como tempo, posição, ângulo, etc. Essa quantidade assume um valor (amplitude) da forma de onda num determinado instante, chamado **Valor Instantâneo**, geralmente representado por uma letra minúscula (v ou i , por exemplo). O **Valor de Pico** (Amplitude Máxima) é o máximo valor da forma de onda medido a partir de seu valor zero (eixo y) e geralmente é representado em letra maiúscula (V_P ou I_P , por exemplo). Esses e outros parâmetros importantes das formas de onda senoidais serão estudados neste capítulo.

As tensões e correntes elétricas alternadas ou são puramente senoidais, ou podem ser decompostas em uma série de componentes puramente senoidais que compõem o chamado espectro de frequências do sinal, conhecido como **harmônicos**. Esta série de sinais é conhecida como **Série de Fourier** e será estudada posteriormente.

Portanto, conhecermos o **valor médio**, o **valor eficaz**, o **valor de pico**, a **frequência** e a **fase** de uma senóide é muito importante para o estudo do comportamento energético das tensões e correntes elétricas.

3.1. VALOR DE PICO:

Ao conjunto de valores positivos e negativos de uma sinusóide chamamos de ciclo, que no caso do gerador elementar de tensão e corrente alternada, estudado no capítulo anterior, corresponde a uma volta completa da espira no campo magnético.

O **Valor de Pico** é a amplitude da forma de onda que corresponde ao máximo valor no eixo vertical. O máximo valor da corrente é a Corrente de Pico (I_P) e o máximo valor da tensão é a Tensão de Pico (V_P), como indica a figura 3.1.1.

O **Valor de Pico a Pico** de tensão e corrente (V_{pp} e I_{pp}) é o valor correspondente entre o pico superior (amplitude máxima positiva) e o pico inferior (amplitude máxima negativa ou vale) e é exatamente o dobro do valor de pico numa forma de onda senoidal, pois esta é simétrica.

$$V_{pp} = 2 \cdot V_p$$

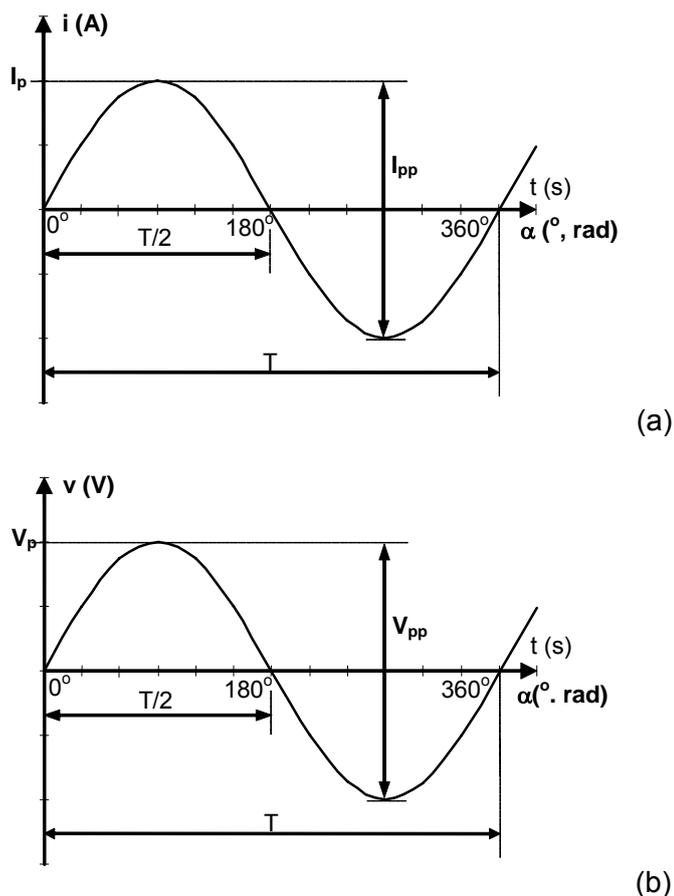


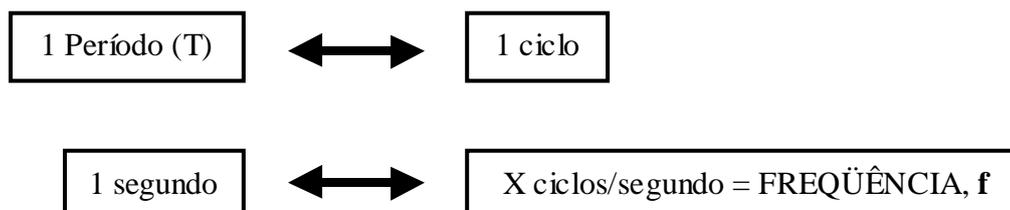
Fig.3.1.1 – Formas de onda: (a) da corrente e (b) da tensão em função do tempo e os seus parâmetros.

3.2. PERÍODO (T):

É o tempo necessário para a ocorrência de um ciclo completo de uma função periódica, como mostra a figura 3.1.1. Com relação ao gerador elementar estudado no capítulo anterior, Período (T) é o tempo necessário para a espira dar uma volta completa, ou seja, percorrer 360° (2π rad). A **unidade do Período** é o **segundo (s)**.

3.3. FREQUÊNCIA (f):

A velocidade na qual os ciclos são produzidos é chamada frequência. **É o número de ciclos por unidade de tempo** (a cada segundo). Relacionando, obtemos:



portanto:

$$T \times f = 1 \times 1$$

$$f = \frac{1}{T}$$

No Sistema Internacional (SI) a **unidade da Freqüência**, ciclos por segundo, é chamada **Hertz¹ (Hz)**. Assim, um Hertz significa um ciclo completado em um segundo

A freqüência da rede elétrica comercial brasileira é 60Hz, assim como nos Estados Unidos, enquanto que nos países vizinhos da América Latina e na Europa a freqüência é 50Hz. Sinais com freqüências entre 3kHz e 300GHz estão na faixa da chamada Rádio-freqüência e podem se propagar no espaço. As freqüências audíveis para o ser humano estão na faixa de 15Hz (sons graves) a 20kHz (sons agudos). O chamado Espectro de Freqüências está apresentado no anexo A.4, no final deste trabalho.

3.4. FREQÜÊNCIA ANGULAR OU VELOCIDADE ANGULAR (ω):

Do estudo da matemática, sabemos que o valor de Pi (π) é uma constante dada pela razão do perímetro da circunferência pelo seu diâmetro:

$$\pi = \frac{C}{D} = 3,141592654$$

Assim, o perímetro (comprimento) da circunferência pode ser dado por:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot R$$

O Radiano é uma unidade de medida de ângulo definida por um quadrante de círculo onde a distância percorrida na circunferência (arco) é igual ao raio do círculo, como mostra a figura 3.4.1. Essa relação fornece:

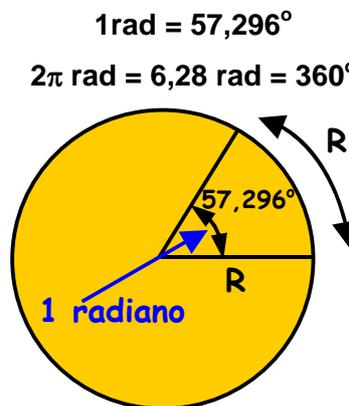


Figura3.4.1 – radiano como medida de ângulo.

Para fazermos a **conversão de graus para radianos** usamos a relação:

$$\text{Radianos} = \left(\frac{\pi}{180} \right) \times \text{graus}$$

¹ **Heinrich Rudolph Hertz**: físico e professor (Alemanha, 1857-1894), pesquisou tensões e correntes alternadas e seus efeitos nos elementos passivos, ondas eletromagnéticas e propagação.

Para fazermos a **conversão de radianos para graus** usamos a relação:

$$\text{Graus} = \left(\frac{180}{\pi} \right) \times \text{radianos}$$

Sabemos que uma forma de onda senoidal pode ser obtida a partir do comprimento da projeção vertical de um vetor girando num movimento circular uniforme (MCU) sobre um ponto fixo. Após uma volta completa temos o período completo da senóide. A figura 3.4.2 ilustra essa situação.

A velocidade com que este vetor gira é chamada de frequência angular (ou velocidade angular).

A frequência angular ou velocidade angular (também chamada pulsação), ω nos dá a noção do ângulo percorrido a cada unidade de tempo. Podemos dizer que é a velocidade com que percorremos ângulos num movimento circular (movimento harmônico).

Como podemos medir ângulo em radianos, a frequência angular ou velocidade angular ω corresponde ao número de radianos percorridos por unidade de tempo.

$$\omega = \frac{\text{distância}(\text{rad})}{\text{tempo}(\text{s})}$$

Para um ângulo α qualquer percorrido em um dado tempo t :

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

O ângulo α é chamado de **posição angular**:

$$\alpha = \omega \cdot t$$

Ao final do ciclo, o ângulo α percorrido será sido 2π rad (360°), em um tempo total chamado de período. Assim:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f$$

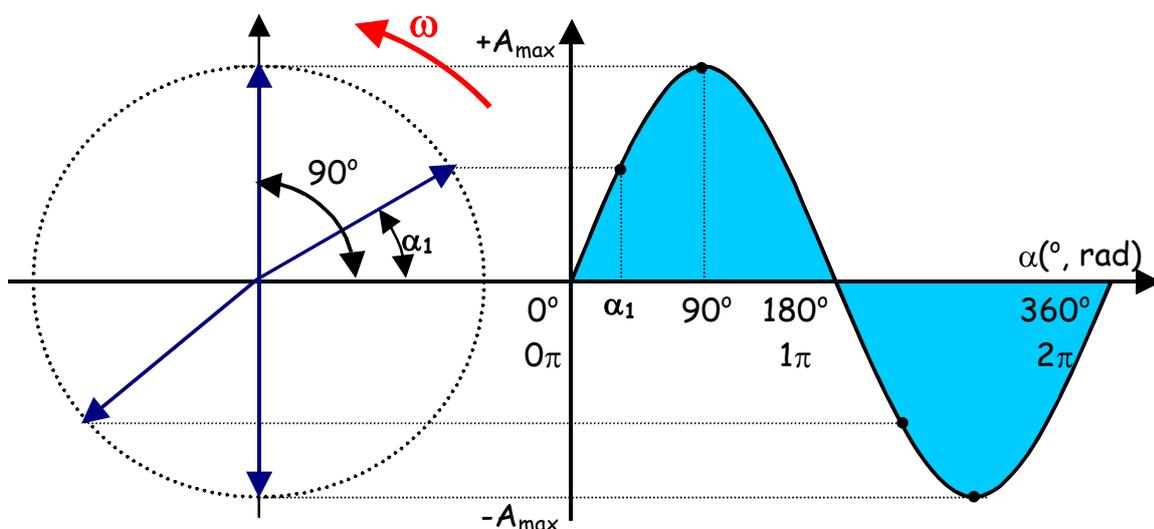
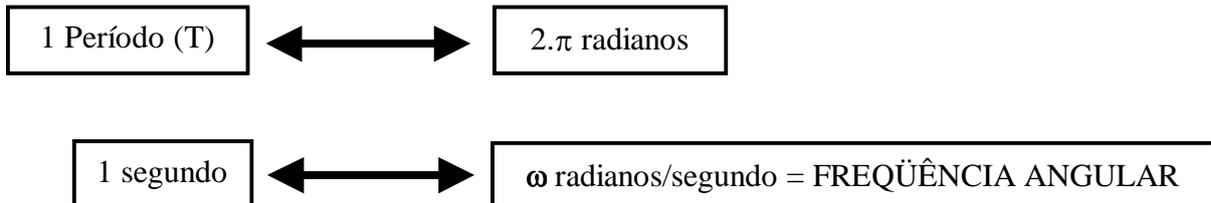


Figura 3.4.2 – a projeção de um vetor girando descreve uma senóide.

Freqüência e freqüência angular são parâmetros que fornecem a mesma informação. Os dois indicam com que "velocidade" a função se repete. A freqüência nos fornece essa informação em Hz (ciclos/segundo), enquanto que a freqüência angular nos fornece em rad/s (radianos por segundo).

Podemos relacionar " ω " com "T" e "f" a partir do funcionamento do gerador elementar de corrente alternada. Uma vez que a corrente produzida pelo gerador, completa um período quando a espira realiza um ciclo completo, ou seja, percorre 2π radianos, temos:



Assim,

$$T \times \omega = 1 \times 2\pi$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

como $f = \frac{1}{T}$, temos:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Unidade: rad/s

3.5. FUNÇÃO MATEMÁTICA DA TENSÃO E DA CORRENTE ALTERNADA SENOIDAL.

A figura 3.5.1 mostra a forma de onda geral para uma função senoidal. Da matemática sabemos que:

$$f(\alpha) = A_{\max} \cdot \text{sen}(\alpha)$$

$$f(\alpha) = A_{\max} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

Podemos notar a relativa simplicidade da equação matemática que representa uma forma de onda senoidal. Qualquer forma de onda alternada não senoidal não poderá ser representada por um único termo, mas pode requerer dois, quatro, seis ou um número infinito de termos senoidais para ser representada fielmente. Esse processo é determinado pelas **Séries de Fourier**, como apresentado no Anexo A.5.

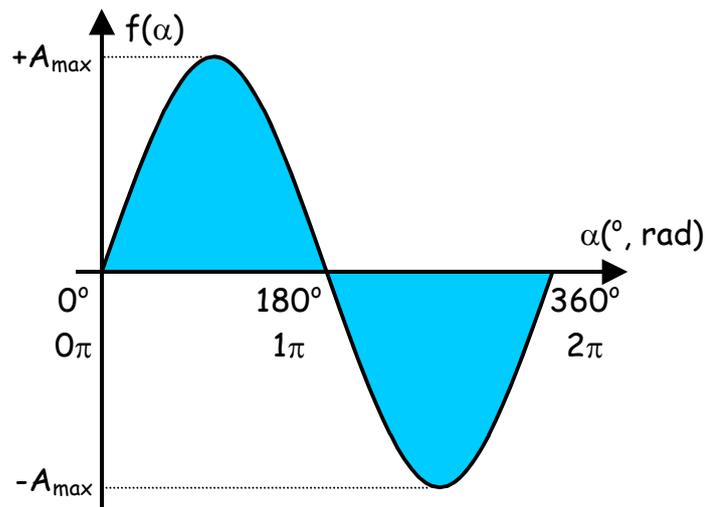


Figura 3.5.1 – forma de onda para uma função senoidal

Os gráficos de uma forma de onda senoidal de tensão e corrente, como os da figura 3.1.1, podem ser expressos matematicamente no chamado **domínio do tempo**, onde o valor da tensão e corrente são função do instante de tempo (t), e no chamado **domínio angular**, onde o valor da tensão e corrente são função da posição angular da espira no campo magnético no caso do nosso gerador elementar de corrente alternada (figuras 2.2.2, 2.2.3 e 2.2.4).

Em um período ou ciclo completo (360°), $\alpha = 2\pi \text{ rad}$. Podemos relacionar:

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{1T}{t}$$

desenvolvendo:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t = \omega \cdot t$$

então, a **posição angular** α pode ser dada por:

$$\alpha = \omega \cdot t$$

A posição angular ($\omega \cdot t$) é dada pelo produto da frequência angular (ω) pelo instante de tempo (t), e nos fornece o ângulo no qual a espira se encontra:

Podemos verificar que o produto da frequência angular ω (rad/s) pelo instante de tempo (s) é mesmo um ângulo pela relação das unidades:

$$\frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \text{s} = \text{rad}$$

Como a tensão é senoidal e é função do tempo, podemos expressar a tensão a cada instante através da função matemática de tensão instantânea.

3.5.1. Tensão Instantânea:

Para uma senóide o valor da tensão é expresso em função do ângulo α , dado pela posição angular da espira no campo magnético:

$$v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen}(\alpha)$$

O **valor instantâneo** de uma grandeza senoidal é o valor que essa grandeza assume num dado instante de tempo considerado. Assim, o valor da tensão v num dado instante de tempo t pode ser dado pela função senoidal:

$$v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

onde:

$v(t)$ – tensão instantânea (V)

V_p - tensão de pico (V);

ω - frequência angular (rad/s);

t – instante de tempo (s).

Exemplo 3.5.1: Esboce o gráfico tensão x tempo para a tensão instantânea $v(t) = 10 \cdot \text{sen}(10 \cdot t)$.

Solução: da função obtemos:

$$V_p = 10V$$

$$\omega = 10\text{rad/s}$$

Como:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

então,

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{10}{2 \cdot \pi} = 1,59$$

$$f = 1,59\text{Hz}$$

Assim:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1,59} = 0,628$$

$$T = 628\text{ms}$$

Fazendo a variável independente t assumir valores desde 0 até $T = 628\text{ms}$, podemos calcular a posição angular ω e a tensão instantânea correspondente e traçar a forma de onda.

Para tanto é necessário determinarmos os instantes mais significativos: dividindo 628ms por 8 intervalos (poderíamos utilizar mais intervalos, para maior precisão), obtemos o valor $78,5\text{ms}$ para cada intervalo. Assim

$$\text{Para } t=0\text{s: } v(0)=10\text{sen}(10 \cdot 0)=0$$

$$\text{Para } t=78,5\text{ms: } v(0,0785)=10\text{sen}(10 \cdot 0,0785)=7,09$$

Fazendo o mesmo procedimento para outros intervalos de tempo obtemos a tabela 3.5.1 que dará origem à forma de onda da figura 3.5.2.

tempo t (s)	posição angular $\omega \cdot t$ (rad)	tensão instantânea v(t) (V)
0,00	0,00	0,00
0,0785	0,785 ($\pi/4$)	7,09
0,157	1,57 ($\pi/2$)	10,0
0,235	2,35 ($3\pi/4$)	7,09
0,314	3,14 (π)	0,00
0,392	3,92 ($5\pi/4$)	-7,09
0,471	4,71 ($3\pi/2$)	-10,0
0,549	5,49 ($7\pi/4$)	-7,09
0,628	6,28 (2π)	0,00

Tabela 3.5.1 – exemplo 3.5.1

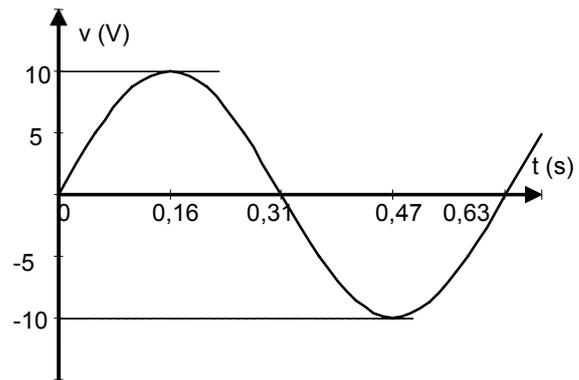


Figura 3.5.2 – forma de onda para o exemplo 3.5.1

3.5.2. Corrente Instantânea:

Considerando que a corrente senoidal também é função do tempo, podemos representar, matematicamente, a corrente instantânea da seguinte forma:

$$i(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

onde:

I_p - corrente de pico (A);

ω - frequência angular (rad/s);

t – instante de tempo (s).

Exemplo 3.5.2: Considere a forma de onda da figura 3.5.3 para obter a função matemática que a descreve.

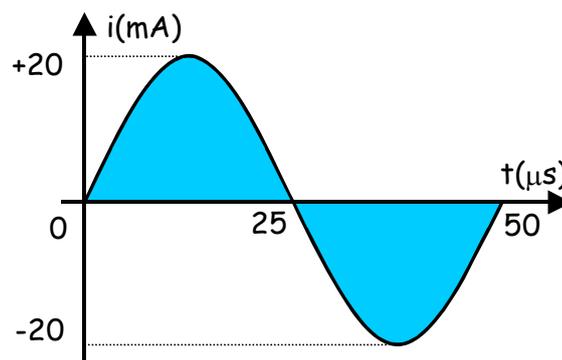


Figura 3.5.3 – forma de onda para o exemplo 3.5.2.

Solução: analisando a forma de onda da figura 3.5.3 obtemos:

$$T = 50\mu\text{s}$$

$$f = 1/T = 20\text{kHz}$$

$$\omega = 2\pi f = 125663,7\text{rad/s}$$

$$I_p = 20\text{mA}$$

então a função matemática que descreve a corrente instantânea é:

$$i(t) = 20.\text{sen}(125663,7.t) \text{ mA}$$

3.6. VALOR MÉDIO

O valor médio de uma função representa o resultado líquido da variação de uma grandeza física como deslocamento, temperatura, tensão, corrente, etc.

O valor médio **não** representa o resultado líquido energético, ou trabalho realizado, mas apenas a resultante líquida entre excursões positivas e negativas para o valor de uma função, chamada média aritmética.

A média aritmética de um dado número finito de valores de eventos discretos (não contínuos) é a soma dos valores desses eventos dividida pelo número de eventos. Por exemplo, a média aritmética das notas é a soma dos valores das notas (eventos) dividida pelo número de notas. Assim, o valor médio de uma função matemática é a sua média aritmética dada pela relação entre a somatória algébrica dos valores da função e o número de valores, ou seja:

$$V_{\text{med}} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n}$$

No caso de uma função qualquer o valor médio é dado pela soma das áreas positivas e negativas que são descritas periodicamente ao longo do tempo. Assim, para uma forma de onda, como mostra a figura 3.6.1, o valor médio pode ser determinado pela área total sob a curva, dividido pelo período da forma de onda:

$$V_{\text{med}} = \frac{\sum A}{T} = \frac{\sum (\Delta V_n \cdot \Delta t_n)}{T}$$

onde:

$\sum A$ - soma algébrica das áreas sob as curvas;

T - período da curva;

ΔV_n - variação da amplitude no trecho n da forma de onda;

Δt_n - intervalo de tempo correspondente ao trecho n da forma de onda;

n - número de trechos compreendidos no intervalo T .

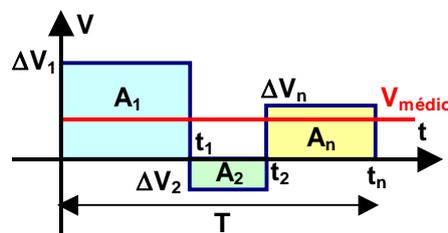


Figura 3.6.1 – valor médio de uma forma de onda

Exemplo 3.6.1: Determinar o valor médio para a forma de onda da figura 3.6.2.

$$V_{\text{médio}} = \frac{(4 \times 2) + (-2 \times 2) + (3 \times 2) + (1 \times 2)}{8} = \frac{8 - 4 + 6 + 2}{8} = \frac{12}{8} = 1,5$$

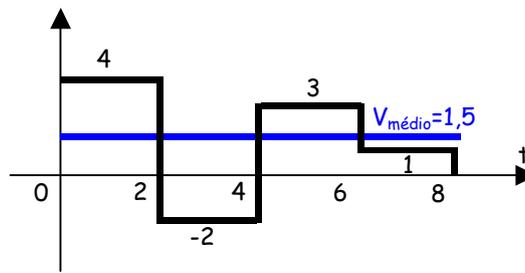


Figura 3.6.2 – forma de onda para o exemplo 3.6.1.

Exemplo 2.6.2: Determinar o valor médio para a forma de onda da figura 3.6.3.

$$V_{\text{médio}} = \frac{(2 \times 1) + (-2 \times 1)}{2} = \frac{2 - 2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

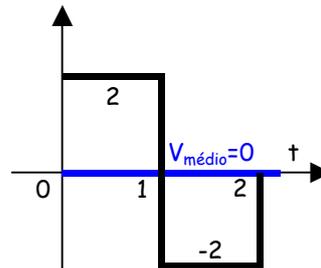


Figura 3.6.3 – forma de onda para o exemplo 3.6.2.

Para uma função periódica contínua, o valor médio pode ser dado por:

$$V_{\text{med}} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_i}^{t_f} v(t) \cdot dt$$

Para uma função periódica senoidal, como a apresentada na figura 3.6.4, onde $t_i=0$ e $t_f=T$, o valor médio é:

$$\begin{aligned} V_{\text{med}} &= \frac{1}{T} \cdot \int_{t_i}^{t_f} v(t) \cdot dt = \frac{1}{\omega T} \cdot \int_{\omega t_i}^{\omega t_f} v(\omega t) \cdot d\omega t = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} V_p \cdot \text{sen}(\omega t) \cdot d\omega t = \frac{V_p}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \text{sen}(\omega t) \cdot d\omega t = \\ &= \frac{V_p}{2\pi} [-\cos(\omega t)]_0^{2\pi} = \frac{V_p}{2\pi} \cdot [-\cos(2\pi) + \cos(0)] = \frac{V_p}{2\pi} \cdot [-1 + 1] = 0 \end{aligned}$$

$$V_{\text{med}} = 0$$

Como a senóide é simétrica ao eixo das abscissas, para todos os valores do semiciclo positivo, temos correspondentes valores no semiciclo negativo, o que faz com que o seu valor médio seja nulo, ou seja, as áreas positivas são iguais às negativas.

Pelo procedimento de cálculo podemos determinar o valor médio de apenas um **semiciclo** (meio período):

$$V_{\text{med},\pi} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T v(t) \cdot dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} V_p \cdot \text{sen}(\omega t) \cdot d\omega t = \frac{V_p}{\pi} \cdot [-\cos(\omega t)]_0^{\pi} = \frac{2 \cdot V_p}{\pi}$$

$$V_{\text{med},\pi} = \frac{2 \cdot V_p}{\pi} = 0,637 \cdot V_p$$

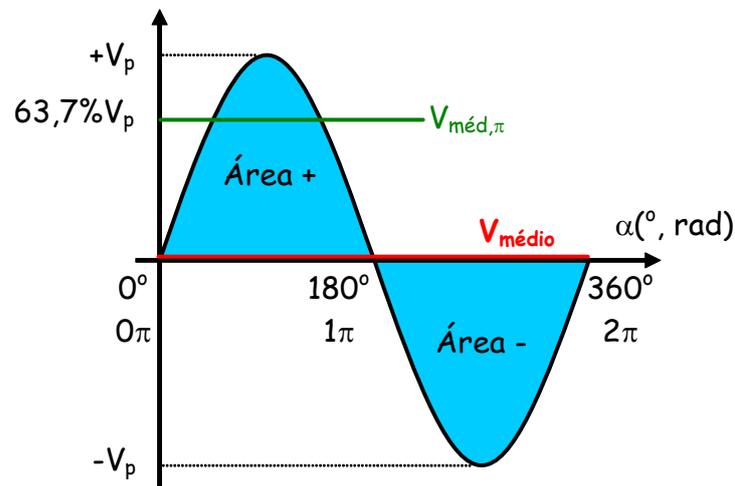


Figura 3.6.4 – função senoidal.

3.7. VALOR EFICAZ

O valor eficaz de uma função representa a **capacidade de produção de trabalho efetivo** de uma grandeza variável no tempo entre as excursões positivas e negativas de uma função.

Matematicamente, o **valor eficaz** de uma função discreta é sua **média quadrática**, dada pela raiz quadrada do somatório dos quadrados dos valores dos eventos dividido pelo número de eventos:

$$V_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (v_i)^2}{n}}$$

Para uma função periódica, o valor eficaz pode ser dado pelo cálculo da média quadrática através do uso da integral:

$$V_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_i}^{t_f} v(t)^2 \cdot dt}$$

Para a função periódica **senoidal** da figura 3.7.1, o valor eficaz é:

$$\begin{aligned} V_{\text{ef}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_i}^{t_f} v(t)^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{\omega T} \cdot \int_{\omega t_i}^{\omega t_f} v(\omega t)^2 \cdot d\omega t} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_p^2 \cdot \text{sen}^2(\omega t) \cdot d\omega t} = \sqrt{\frac{V_p^2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\omega t) \cdot d\omega t} = \\ &= \sqrt{\frac{V_p^2}{2\pi} \left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{4} \right]_0^{2\pi}} = \sqrt{\frac{V_p^2}{2\pi} \left[\frac{2\pi}{2} - \frac{\cos 4\pi}{4} - \frac{0}{2} + \frac{\cos 0}{4} \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{V_p^2}{2\pi} \left[\frac{2\pi}{2} \right]} = \sqrt{\frac{V_p^2}{2}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$V_{\text{ef}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot V_p$$

O valor eficaz corresponde à altura de um retângulo de base igual a um semicíclo e área equivalente a esse semicíclo, como mostra a figura 3.7.1. Portanto, o valor eficaz corresponde a um valor contínuo de 70,7% do valor de pico de uma senóide;

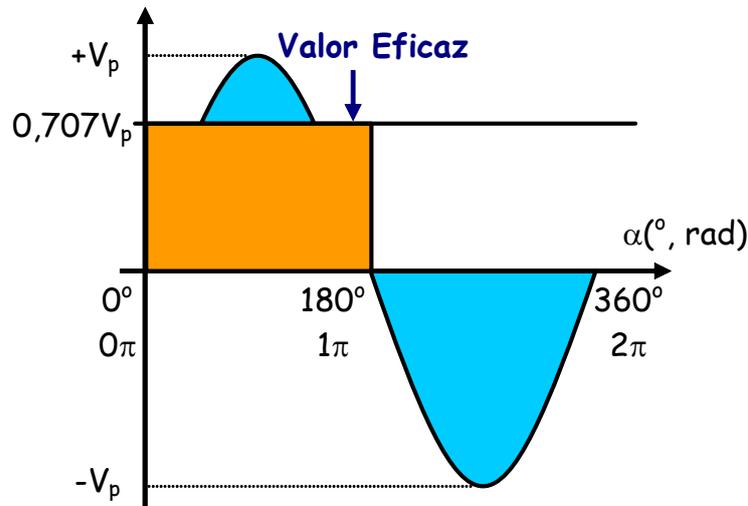


Figura 3.7.1 – valor eficaz de uma senóide.

No estudo de circuitos com tensão e corrente alternadas senoidais é importante entendermos o conceito físico de valor eficaz.

Para entendermos o significado físico do valor eficaz, analisaremos a potência elétrica fornecida a um resistor, tanto em corrente alternada como em corrente contínua, como mostram os circuitos da figura 3.7.2.

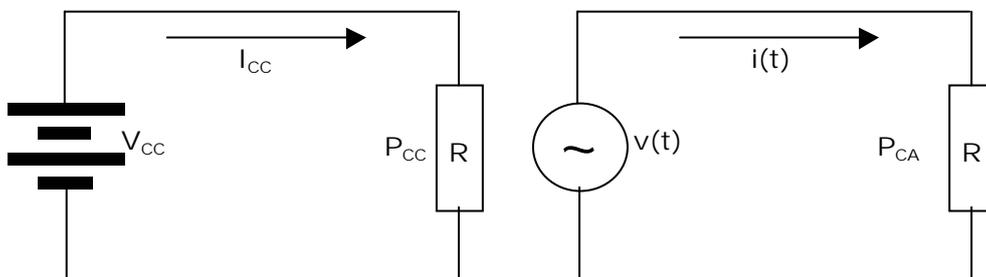


Figura 3.7.2 - Fontes de Tensão Contínua e Alternada alimentando um mesmo resistor e fornecendo a mesma potência média

Qual seria a tensão e a corrente alternada que fariam com que o resistor R dissipasse a mesma potência em CA que a dissipada em CC?

Se fizermos isso na prática, verificaremos que o valor de tensão e corrente contínua a ser aplicado corresponde ao valor eficaz de tensão e de corrente alternadas.

Como vimos, esse valor é matematicamente dado pela média quadrática da função. Para um **sinial senoidal** pode ser calculado a partir do seu valor de pico através da relação:

$$V_{ef} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot V_p$$

O mesmo conceito também é válido para o valor eficaz de corrente:

$$I_{ef} = \frac{I_p}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_p$$

Como mostra a figura 3.7.3, o valor da tensão eficaz ou da corrente eficaz de uma forma de onda é o valor matemático que corresponde a uma tensão ou corrente contínua constante que produz o mesmo efeito de dissipação de potência numa dada resistência.

O valor da tensão eficaz ou da corrente eficaz é o valor que produz numa resistência o mesmo efeito que uma tensão/corrente contínua constante desse mesmo valor.

Para a rede elétrica comercial sabemos que o valor da tensão eficaz é 220V/60Hz, o que corresponde a um valor de pico de:

$$V_p = \sqrt{2} \cdot V_{ef} = 0,707 \cdot 220 = 311,1V$$

Na prática, o que se tem na rede elétrica CA é um sinal senoidal de 60 ciclos por segundo (60Hz), cuja tensão varia a todo instante desde +311,1V a -311,1V, passando por zero a cada meio ciclo. A tensão eficaz de 220V é o valor correspondente a uma tensão contínua constante que produziria o mesmo efeito da rede CA numa dada resistência, como um chuveiro elétrico, por exemplo.

Um sinal senoidal de tensão/corrente alternada está sempre variando e, portanto, o valor eficaz é apenas uma referência matemática.

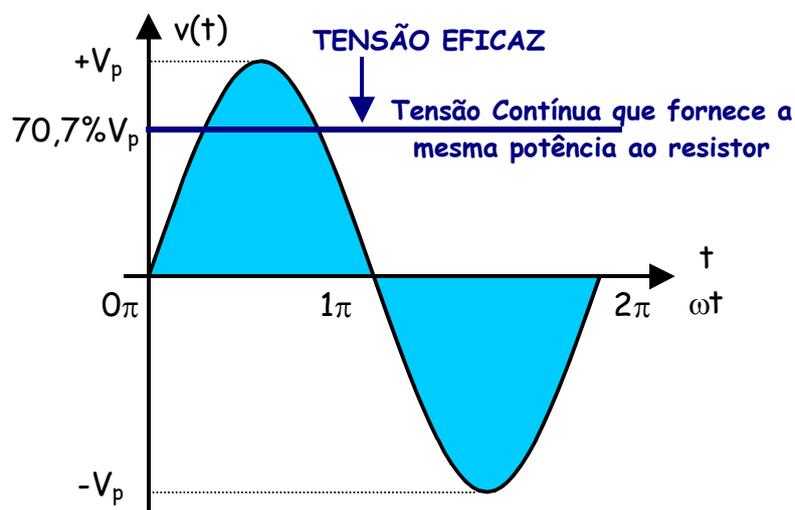


Figura 3.7.3 - A tensão eficaz é equivalente a uma tensão contínua que produz o mesmo efeito numa resistência.

Observações:

- O valor eficaz também é conhecido como Valor RMS, do inglês *root mean square* (valor quadrático médio);
- Os instrumentos comuns de medição em corrente alternada (voltímetros, amperímetros e multímetros) fornecem valores eficazes **somente para sinais senoidais**;
- Para medir o valor eficaz de uma forma de onda de tensão (ou de corrente) não perfeitamente senoidal deverá ser usado um voltímetro (ou amperímetro) mais sofisticado, conhecido como **True RMS (Eficaz Verdadeiro)** que é capaz de fazer a integração da forma de onda e fornecer o valor eficaz exato para qualquer forma de onda.
- Para uma forma de onda contínua constante (de tensão ou corrente, por exemplo) o valor eficaz é igual ao valor médio.

3.8. FATOR DE FORMA

O fator de forma de uma onda é definido pela relação entre o valor eficaz e o valor médio dessa onda:

$$K = \frac{V_{ef}}{V_{med,\pi}}$$

Para uma forma de onda senoidal, o fator de forma pode ser dado por:

$$K_{sen} = \frac{V_{ef}}{V_{med,\pi}} = \frac{\frac{V_p}{\sqrt{2}}}{\frac{2 \cdot V_p}{\pi}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2 \cdot V_p} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}}$$

$$K_{sen} = 1,11$$

Observação: note que para o cálculo do fator de forma de um sinal senoidal foi usado o valor médio de um semiciclo, já que o valor médio do ciclo completo é zero.

3.9. FASE INICIAL E DEFASAGEM ANGULAR.

Consideremos três corredores com a mesma velocidade dando voltas numa pista circular, como indica a figura 3.9.1:

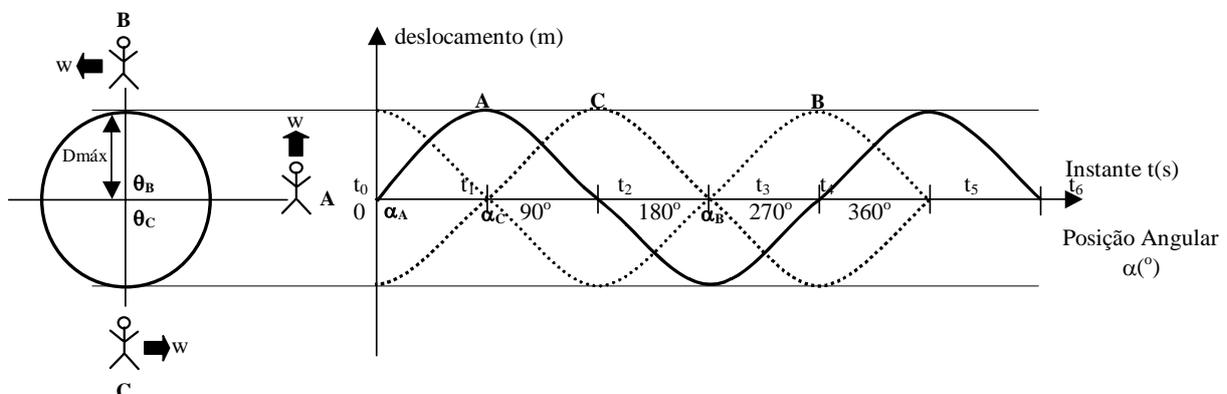


Figura 3.9.1 – Descrição do deslocamento de três corredores numa pista circular

Sabemos que, todo movimento circular (harmônico) pode ser descrito (projetado) através de uma senóide. O gráfico da figura 3.9.1 descreve o deslocamento vertical dos corredores "A", "B" e "C" em função do tempo "t" (ou do ângulo percorrido) no mesmo eixo.

Como um movimento circular pode ser descrito por uma senóide, a função que descreve o deslocamento do corredor "A" no tempo pode ser dada por:

$$C_A(t) = D_{max} \cdot \text{sen}(\omega t)$$

Porém, o deslocamento do corredor "B" não pode ser descrito por $C_B(t) = D_{max} \text{sen}(\omega t)$, pois teríamos $C_B(t) = 0$ para $t=0$ o que não é verdade. Em $t=0$ o corredor "B" está na amplitude máxima. O mesmo ocorre para o corredor "C".

Observando com atenção o gráfico acima percebe-se que a curva $C_B(t)$ é idêntica a $C_A(t)$, porém deslocada de 90° ($\pi/2$), este deslocamento pode ser descrito pela adição de um ângulo no argumento da função seno:

$$C_B(t) = D_{\max} \cdot \text{sen}(\omega t + 90^\circ)$$

Este ângulo de deslocamento é chamado **Fase Inicial** θ . Como a fase inicial do corredor A é zero, dizemos que a função $C_B(t)$ está **defasada de 90°** da função $C_A(t)$ ou que a função $C_B(t)$ está **adiantada em 90°** em relação a $C_A(t)$.

A equação que descreve o deslocamento do corredor "C" pode ser dada por:

$$C_C(t) = D_{\max} \cdot \text{sen}(\omega t - 90^\circ)$$

Dizemos que a função $C_C(t)$ está **defasada de -90°** da função $C_A(t)$ ou que a função $C_C(t)$ está **atrasada em 90°** em relação a $C_A(t)$.

A **Defasagem Angular** ϕ é, portanto, a medida em radianos ou graus, que indica quanto uma função senoidal está deslocada no tempo (defasada) uma em relação a outra tomada como referência, e é dada pela diferença entre os ângulos de fase inicial θ de cada função:

$$\phi_{x,\text{ref}} = \theta_x - \theta_{\text{ref}}$$

A equação acima demonstra a defasagem de uma forma de onda X com relação a uma outra forma de onda, tomada como referência.

- Se ϕ for **positivo**: x está **adiantada** da referência
- Se ϕ for **negativo**: x está **atrasada** da referência

Em análise de circuitos de corrente alternada, também teremos defasagens entre as tensões e correntes. Por exemplo, consideremos que as espiras dos dois geradores de corrente alternada da figura 3.9.2(a) comecem a girar ao mesmo tempo com a mesma frequência, porém com ângulos de fase iniciais diferentes. A corrente produzida por cada gerador ficaria com a forma da figura 3.9.2(b).

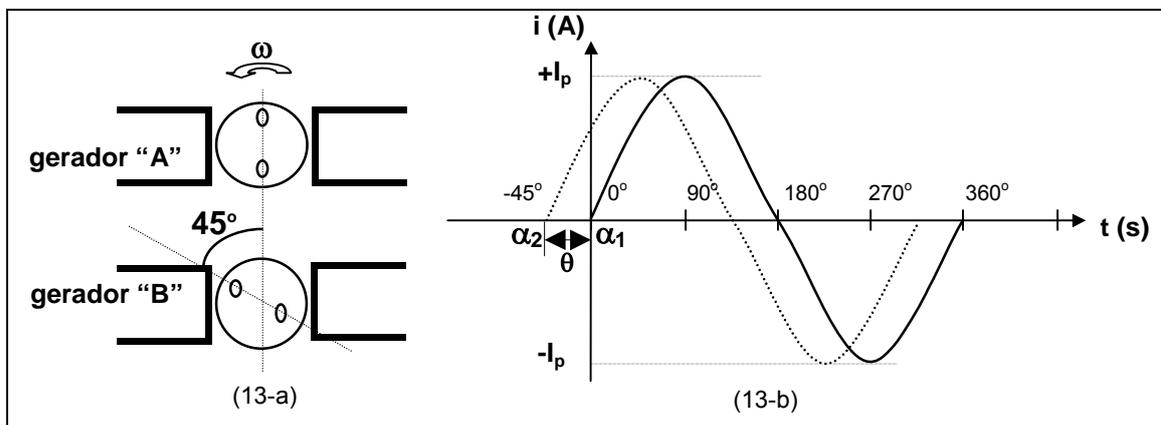


Figura 3.9.2 – (a) Dois geradores iguais com mesma velocidade angular, defasados de 45° ; (b) Gráfico da tensão gerada

As funções matemáticas que representam estas formas de onda são:

$$i_1(t) = V_p \text{sen}(\omega t + 0^\circ)$$

$$i_2(t) = V_p \text{sen}(\omega t + 45^\circ)$$

As expressões matemáticas genéricas para a tensão e para a corrente instantânea, com um ângulo de fase inicial θ , são dadas por:

$$v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_v)$$

$$i(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_1)$$

Observação: Esta representação é chamada **forma trigonométrica**.

Podemos dizer que o ângulo de fase inicial θ é o ângulo α da posição angular no qual inicia um **semiciclo positivo** da forma de onda senoidal, com **sinal trocado**.

$$\theta = -\alpha$$

As figuras 3.9.3, 3.9.4 e 3.9.5 ilustram essa conclusão.

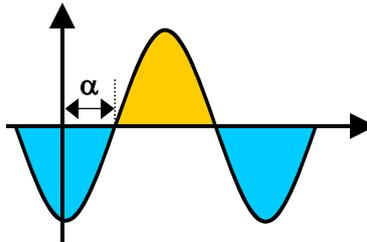


Figura 3.9.3 - Semiciclo positivo começa em $+\alpha = -\theta$: $v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \theta)$ – atrasada.

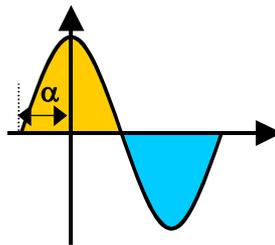


Figura 3.9.4 - Semiciclo positivo começa em $-\alpha = \theta$: $v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta)$ – adiantada

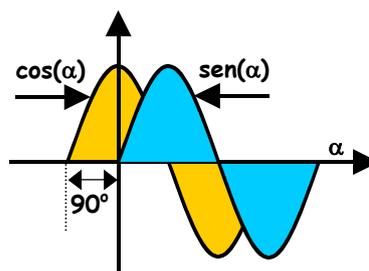


Figura 3.9.5 - Semiciclo positivo começa em $\alpha = -90^\circ$: $v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + 90^\circ) = V_p \cdot \text{cos}(\omega \cdot t)$.

As formas de onda podem estar:

- **Em fase:** quando as formas de onda cortam o eixo x no mesmo ponto;
- **Defasadas:** quando as formas de onda cortam o eixo x em pontos diferentes.

E ainda:

- **Adiantada:** semiciclo positivo começa à esquerda da origem;
- **Atrasada:** semiciclo positivo começa à direita da origem;

- **Defasagem:** diferença entre os ângulos de fase de duas senóides.

Observação: os termos “adiantada” e “atrasada” só podem ser aplicados para comparar fases de formas de onda de **mesma frequência**.

Por convenção, o **ângulo** correspondente à **defasagem angular é dado em graus**, como indica a figura 3.9.3, apesar de a posição angular ωt ser dada em rad/s. Portanto, deve-se ter o cuidado de se converter as unidades quando alguma operação matemática dessa expressão for necessária.

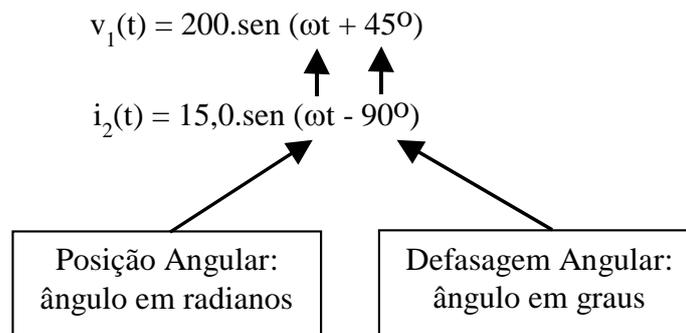


Figura 3.9.3 – convenção para representação do ângulo de fase na expressão trigonométrica.

Exemplo 3.9.1: Determine a defasagem entre os sinais:

$$v_1(t) = 100 \cdot \text{sen}(100t) \quad \Rightarrow \quad \text{tensão tomada como referência (sem fase inicial)}$$

$$v_2(t) = 40 \cdot \text{sen}(100t - 60^\circ) \quad \Rightarrow \quad \text{tensão } v_2 \text{ atrasada } 60^\circ \text{ em relação a tensão } v_1:$$

$$\phi = \theta_2 - \theta_1 = -60 - 0 = -60^\circ$$

$$i_3(t) = 2 \cdot \text{sen}(\omega t + 45^\circ) \quad \Rightarrow \quad \text{corrente } i_3 \text{ adiantada } 45^\circ \text{ em relação a } v_1:$$

$$\phi = \theta_3 - \theta_1 = 45 - 0 = +45^\circ$$

Questão: A corrente $i_3(t)$ está atrasada ou adiantada em relação à tensão $v_2(t)$?

3.10. OSCILOSCÓPIO

O osciloscópio é um instrumento que mostra **formas de onda de tensão**. Na figura 3.10.1 vê-se uma foto de um osciloscópio e na figura 3.10.2 uma tela padrão de osciloscópio, onde aparecem as escalas vertical e horizontal. As telas dos osciloscópios são divididas em linhas verticais e horizontais separadas por **1cm**, chamadas de **divisão**.

A **escala vertical** define a tensão associada com cada divisão da tela. A **escala horizontal** define o período de tempo associado com cada divisão horizontal da tela.

Por exemplo, se a escala horizontal for $50\mu\text{s}/\text{divisão}$ e a vertical for, $5\text{V}/\text{divisão}$ podemos determinar os parâmetros da forma de onda indicada. Lendo a escala horizontal podemos verificar que o período corresponde a 4 divisões:

$$\text{Período: } 4 \text{ divisões} \times 50\mu\text{s}/\text{divisão} \quad \Rightarrow \quad T = 200\mu\text{s}$$

$$\text{Frequência: } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{200 \cdot 10^{-6}} = 5000 = 5\text{kHz}$$

Verificando a escala vertical podemos ler um valor de pico de 2 divisões:

$$\text{Valor de Pico: } 2 \text{ divisões} \times 5\text{V}/\text{divisão} \quad \Rightarrow \quad V_p = 10\text{V}$$

$$\text{Valor Eficaz: } V_{\text{ef}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,07\text{V}$$

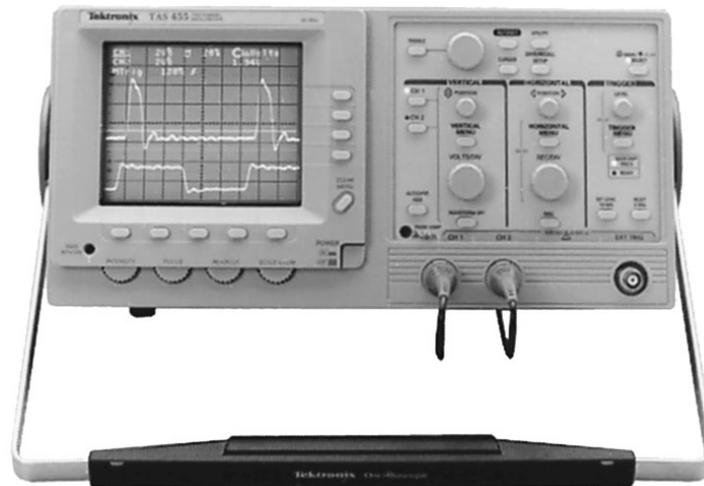


Figura 3.10.1 –Osciloscópio.

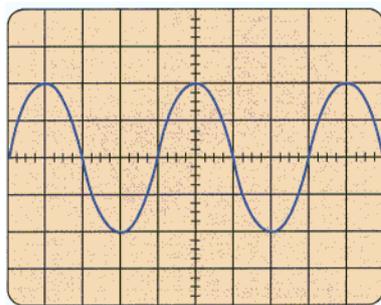


Figura 3.10.2 – tela padrão de um osciloscópio.

Na tela do osciloscópio, como mostra a figura 3.10.2, também podemos notar uma escala nos eixos principais, chamada de **sub-divisão**, para auxiliar na leitura mais precisa dos valores.

3.11. EXERCÍCIOS:

- 3.11.1) Determine o tempo que dura um ciclo e um semi-ciclo de um sinal senoidal cuja freqüência é 60Hz, 1000Hz e 100,9MHz.
- 3.11.2) Determine o tempo necessário para uma senóide de tensão da rede comercial percorrer o trecho compreendido entre 0rad e $\pi/3$ rad.
- 3.11.3) Qual a freqüência obtida em um gerador tetrapolar que gira a 2400rpm?
- 3.11.4) Quanto tempo um sinal de tensão senoidal de 60Hz leva para atingir 25% do seu valor máximo? Quanto tempo leva para atingir o seu valor eficaz?
- 3.11.5) Para uma tensão alternada senoidal cujo valor eficaz é 220V / 60Hz, determine:
 - a) período, velocidade angular, valor de pico, pico a pico, médio e eficaz;
 - b) valor instantâneo quando $\alpha=60^\circ$.
 - c) valor instantâneo quando $t=10\text{ms}$.
- 3.11.6) Uma tensão alternada possui valor médio igual a 25V e valor eficaz 32V. Qual o seu fator de forma?

- 3.11.7) Qual o fator de forma de uma onda de tensão alternada triangular com amplitude $\pm 10V$ e frequência de $1kHz$?
- 3.11.8) Uma corrente alternada de valor eficaz $10A / 60Hz$ inicia seu semiciclo no instante $t=0s$. Determine os instantes de tempo que essa corrente atinge o valor de $\pm 5A$ em um período.
- 3.11.9) Qual o valor máximo de uma tensão senoidal cujo valor é $10V$ no instante $t=15ms$, sendo sua frequência $100Hz$.
- 3.11.10) Para cada uma das funções abaixo determine os valores de V_p ou I_p , f , ω , T , fase inicial e esboce os gráficos de tensão e corrente em função do tempo e da posição angular ($v \times t$; $v \times \omega t$; $i \times t$; $i \times \omega t$).
- $v(t) = 50 \text{ sen}(100t)$ (V)
 - $i(t) = 2,5 \text{ sen}(300t)$ (A)
 - $v(t) = 2,0 \text{ sen}(5000t)$ (V)
 - $i(t) = 0,4 \text{ sen}(250t)$ (A)
 - $v(t) = 230 \text{ sen}(60t)$ (V)
- 3.11.11) Represente graficamente e determine o valor instantâneo da tensão e da corrente para as seguintes funções:
- $v(t) = 2,0 \text{ sen}(300t)$, $t=10ms$
 - $v(t) = 3,0 \text{ sen}(100t - 45^\circ)$, $t=10ms$
 - $i(t) = 2,0 \text{ sen}(300t + 90^\circ)$, $t=10ms$
 - $i(t) = 10,0 \text{ sen}(100t - 30^\circ)$, $t=5ms$
 - $v(t) = 1,5 \text{ sen}(200t + 80^\circ)$, $t=16ms$
 - $v(t) = 10 \text{ sen}(100\pi t + \pi/3)$, $t=15ms$
 - $v(t) = 15 \text{ sen}(20\pi t - 30^\circ)$, $t=15ms$
- 3.11.12) Determine a defasagem e represente graficamente os seguintes sinais senoidais: $v_1(t) = 5 \text{ sen}(100\pi t + \pi/3)$ e $v_2(t) = 8 \text{ sen}(100\pi t - 30^\circ)$.
- 3.11.13) Para cada uma das curvas de tensão e corrente dos gráficos da figura 3.11.1, identifique os parâmetros:
- período, frequência, frequência angular;
 - valor de pico e pico a pico;
 - fase inicial
 - função matemática
 - defasagem;

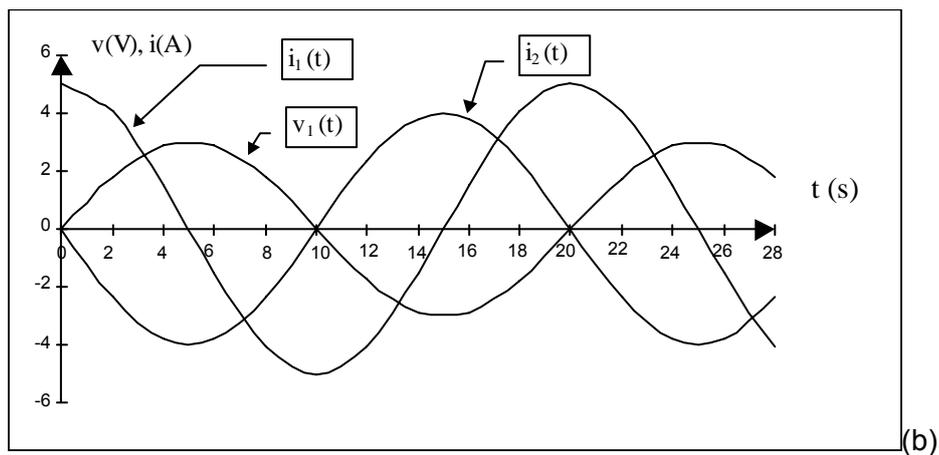
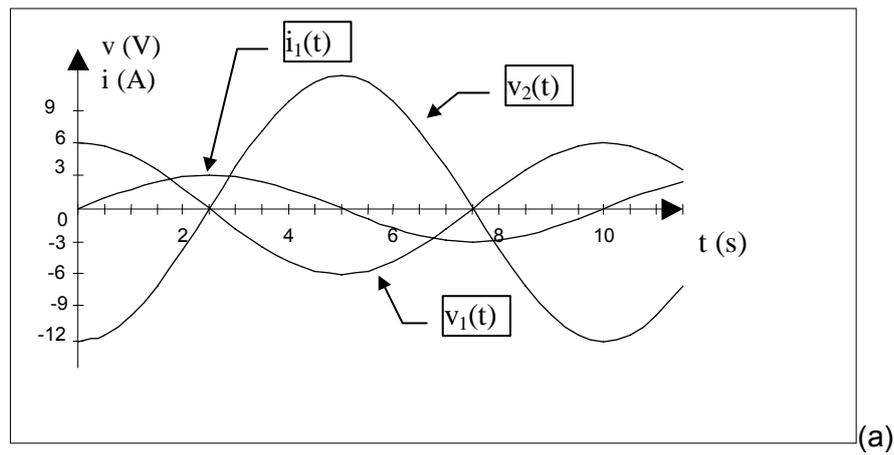


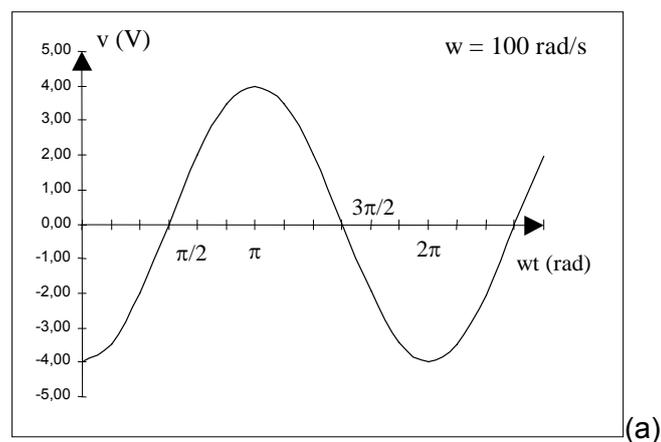
Figura 3.11.1 – exercício 3.11.10

3.11.14) Dadas as funções abaixo, determine os parâmetros e esboce, num mesmo eixo, as curvas de v ou i em função do tempo.

a) $v_1(t) = 5,0 \text{ sen}(377t + 30^\circ)$; $i_2(t) = 3,0 \text{ sen}(377t - 180^\circ)$ e $v_3(t) = 4,5 \text{ sen}(377t)$

b) $v_1(t) = 100,0 \text{ sen}(1000t)$; $v_2(t) = 60,0 \text{ sen}(1000t + 90^\circ)$ e $i_1(t) = 30,0 \text{ sen}(1000t - 45^\circ)$

3.11.15) Dados os gráficos da figura 3.11.2 determine a função da tensão ou da corrente.



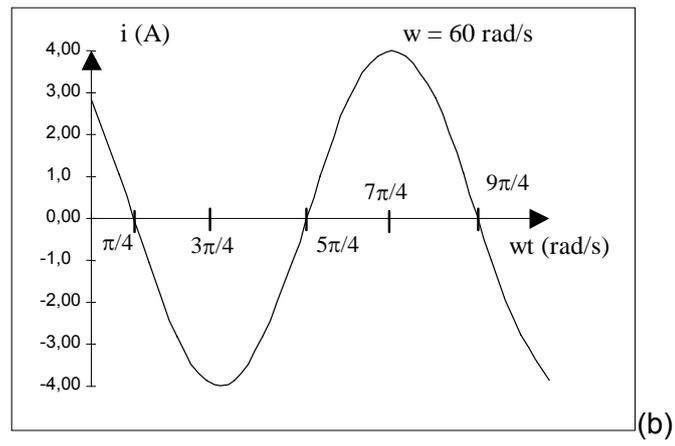


Figura 3.11.2. exercício 3.11.13.

4. NÚMEROS COMPLEXOS

Para a análise de circuitos com sinais senoidais de corrente alternada, assim como na análise de circuitos de corrente contínua, tensões e correntes devem ser operadas algebricamente.

Esta tarefa se torna pouco prática e trabalhosa quando operamos algebricamente equações sinusoidais na forma trigonométrica.

O uso do sistema de números complexos permite relacionar sinais senoidais e se constitui numa técnica prática, fácil e precisa de se operar algebricamente sinais senoidais.

O uso destas técnicas permite a análise de circuitos CA senoidais através da aplicação dos mesmos teoremas e procedimentos usados na análise de circuitos CC.

4.1. PLANO CARTESIANO COMPLEXO

A figura 4.1.1 representa os conjuntos numéricos já estudados em matemática, onde:

- Conjunto dos Números Naturais: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Conjunto dos Números Inteiros: $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$
- Conjunto dos Números Racionais: $\mathbf{Q} = \{x / x = \frac{p}{q}; p \text{ e } q \in \mathbf{Z} \text{ e } q \neq 0\}$
- Conjunto dos Números Reais: $\mathbf{R} = \{\text{racionais e irracionais}\}$

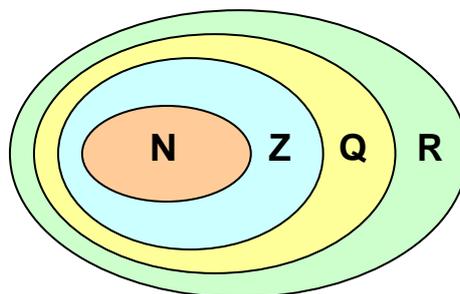


Figura 4.1.1 – Conjuntos dos Números

Há problemas matemáticos que não possuem solução dentro do conjunto dos números reais. Por exemplo:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

O resultado acima não pertence ao conjunto dos números reais.

Um outro exemplo ajuda a visualizar este problema. Seja o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$$

Resolvendo por substituição, temos:

$$x = 10 - y$$

$$(10 - y) \cdot y = 40$$

$$\begin{aligned}
 -y^2 + 10y - 40 &= 0 \\
 y &= \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-40)}}{2 \cdot (-1)} \\
 y &= \frac{-10 \pm \sqrt{-60}}{-2} \\
 y &= \frac{10 \pm \sqrt{4 \cdot (-15)}}{2} \\
 y &= \frac{10 \pm 2 \cdot \sqrt{-15}}{2} \\
 y &= 5 \pm \sqrt{-15}
 \end{aligned}$$

O resultado acima também não pertence ao conjunto dos números reais.

Para resolver as equações semelhantes às apresentadas nos dois exemplos anteriores foi criado um número imaginário cujo quadrado é igual a -1. O símbolo² “j” é usado para denotar um número imaginário. Assim:

$$j^2 = -1 \Rightarrow j = \sqrt{-1}$$

Assim, para a equação do primeiro exemplo:

$$\begin{aligned}
 x &= \pm \sqrt{-1} \\
 x &= \pm j
 \end{aligned}$$

Há, portanto duas soluções para a equação: $x_1 = +j$ e $x_2 = -j$.

Para o segundo exemplo, onde:

$$\begin{aligned}
 y &= 5 \pm \sqrt{-15} \\
 y &= 5 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{15} \\
 y &= 5 \pm j \cdot \sqrt{15}
 \end{aligned}$$

Com a criação do número imaginário pode-se determinar um novo conjunto denominado **Conjunto dos Números Complexos**, como mostra a figura 4.1.2.

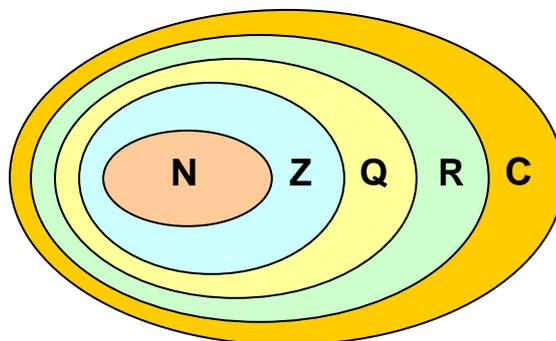


Figura 4.1.2 – Conjuntos dos Números, incluindo os Números Complexos.

² algumas bibliografias utilizam a letra “i” para representação de número imaginário.

Como os números imaginários não são números reais, não são representados no eixo das **abscissas x**, chamado de **eixo real** de um plano cartesiano, mas no eixo das **ordenadas y** que é ortogonal³, chamado de **eixo imaginário**. Então:

Um número imaginário está deslocado de 90° de um número real no plano cartesiano.

O eixo real x e o eixo imaginário y formam um plano cartesiano chamado de **Plano Cartesiano Complexo**, como mostra a figura 4.1.3. Um ponto C qualquer neste plano cartesiano, representa um **Número Complexo**⁴.

Um número complexo é um ponto no plano cartesiano complexo.

A cada número complexo corresponde um e somente um ponto no plano cartesiano complexo e, reciprocamente, a cada ponto no plano cartesiano complexo corresponde um e somente um número complexo.

Números reais à esquerda da origem são negativos e à direita são positivos. Números imaginários acima da origem são positivos e abaixo são negativos.

Há duas formas para representar um número complexo: **a forma retangular e a forma polar**. Ambas formas representam um ponto C no plano complexo, representado pelos seus componentes cartesianos (projeções ortogonais x e y) ou pela magnitude Z do vetor radial traçado desde a origem até o ponto e o seu ângulo θ , medido desde o eixo real.

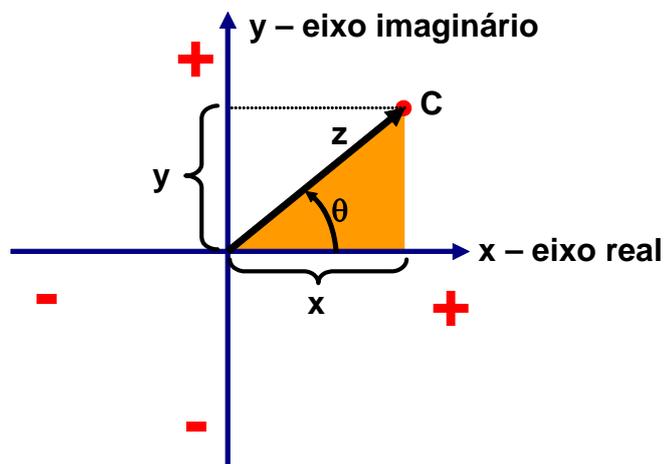


Figura 4.1.3 – plano cartesiano complexo

4.2. FORMA RETANGULAR OU CARTESIANA

Sabemos que um ponto C num plano cartesiano pode ser definido pelas suas coordenadas (x,y) que são as projeções (componentes) ortogonais nas abscissas e nas ordenadas. Assim, um número complexo é, portanto, composto por uma parte real x e uma parte imaginária y, como mostra a figura 4.1.3.

Um número complexo na Forma Retangular (ou Cartesiana) é composto por uma parte real e uma parte imaginária

A forma retangular de representação de um número complexo é feita pela soma algébrica de dois números que representam as coordenadas do ponto C dadas pelas projeções ortogonais da parte real (x) e da parte imaginária (y), como indica a figura 4.1.3. Assim:

³ ortogonal: perpendicular, a 90°.

⁴ complexo: o que é composto de mais de um elemento.

$$C = x + jy$$

onde:

C – número complexo na forma retangular;

x – projeção no eixo x (abscissa) referente à parte real;

y – projeção no eixo y (ordenada) referente à parte imaginária.

Exemplo 4.2.1: representar os números complexos no plano cartesiano:

a) $C = 5 + j3$ ver figura 4.2.1

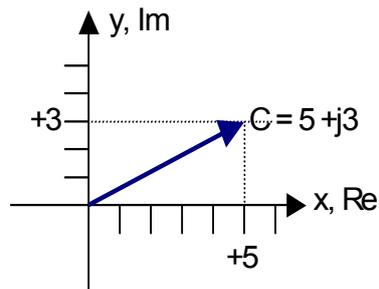


Figura 4.2.1 – solução do exemplo 4.2.1(a)

b) $C = -4 + j8$ ver figura 4.2.2.

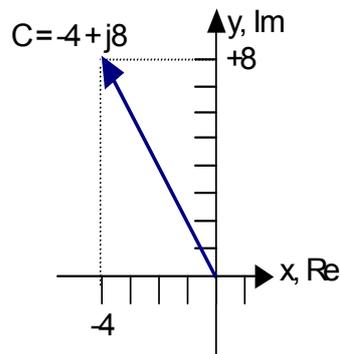


Figura A12 – solução do exemplo 4.2.1(b)

c) $C = 4 - j4$ ver figura 4.2.3.

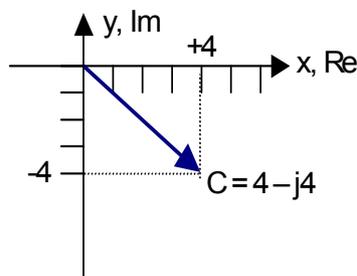


Figura 4.2.3 – solução do exemplo 4.2.1(c)

4.3. FORMA POLAR

O ponto C em um plano cartesiano também pode ser determinado por um **vetor radial** traçado desde a origem do plano até o ponto dado e formando um **ângulo** θ com o eixo das abscissas x, como mostra a figura 4.1.3.

Um número complexo na Forma Polar é um número composto por um vetor e um ângulo.

A forma polar para representação de um número complexo, como mostra a figura 4.1.3, é feita através do vetor radial traçado desde a origem até o ponto, onde a sua magnitude (comprimento) chama-se **módulo** e o ângulo descrito desde o eixo horizontal (x) chama-se **argumento**. Assim:

$$C = z \angle \theta$$

onde:

C - número complexo na forma polar;

z – módulo (comprimento) do vetor radial desde a origem até o ponto ($z > 0$);

θ - argumento (ângulo) do vetor desde o eixo horizontal, medido no sentido anti-horário.

Observação: O símbolo “ \angle ” é usado para indicar o argumento de um número complexo na forma polar e lê-se: “com ângulo de” ou “com argumento de”.

Os ângulos θ do argumento são sempre obtidos a partir do eixo das abscissas x e deve ser adotada a seguinte convenção:

Ângulos positivos (+) são medidos no sentido anti-horário a partir do eixo horizontal x.

Ângulos negativos (-) são medidos no sentido horário a partir do eixo horizontal x.

Exemplo 4.3.1: representar os números complexos no plano.

a) $C = 5 \angle 30^\circ$ ver figura 4.3.1.

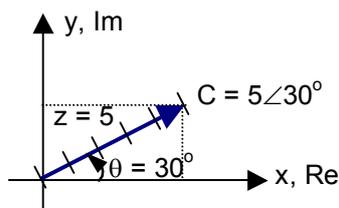


Figura 4.3.1 – solução do exemplo 4.3.1(a)

b) $C = 5 \angle -30^\circ$ ver figura 4.3.2.

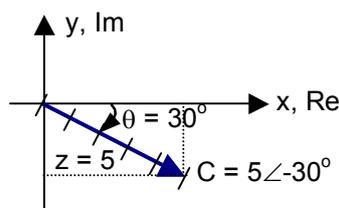


Figura 4.3.2 – solução do exemplo 4.3.1(b)

c) $C = -5 \angle 30^\circ = 5 \angle 210^\circ$ ver figura 4.3.3.

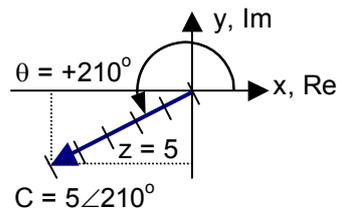


Figura 4.3.3 – solução do exemplo 4.3.1(c)

Observação:

Um sinal negativo no módulo indica uma direção oposta, ou seja:

$$-C = -z\angle\theta = z\angle(\theta \pm 180^\circ)$$

4.4. CONVERSÃO ENTRE FORMAS

Pela figura 4.1.3 podemos observar que as formas retangular e polar estão associadas através das relações trigonométricas do triângulo retângulo formado pelo vetor z e suas projeções ortogonais x e y , como está grifado na figura.

A forma retangular é composta pelas projeções ortogonais real (x) e imaginária (y), ou seja, os catetos adjacente e oposto ao ângulo θ do triângulo retângulo xyz , respectivamente.

4.4.1. Conversão de Retangular para Polar

Para transformar um número complexo da forma retangular para a forma polar, desejamos obter a hipotenusa z e o ângulo θ a partir dos catetos adjacente x e oposto y do triângulo retângulo xyz . Através das relações trigonométricas, temos:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

assim, a hipotenusa do triângulo retângulo xyz é o módulo da forma polar e pode ser dado por:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

sabemos que,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

então o argumento da forma polar pode ser dado pelo ângulo:

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

concluimos que um número complexo na forma polar é:

$$C = z\angle\theta = \sqrt{x^2 + y^2} \angle \left[\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \right]$$

Exemplo 4.4.1: converter os números complexos da forma retangular para a forma polar:

a) $C = 60 + j80$

$$z = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{80}{60}\right) = 53,13^\circ$$

$$C = 100 \angle 53,13^\circ$$

b) $C = 5 - j5$

$$z = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{-5}{5}\right) = -45^\circ$$

$$C = 5\sqrt{2} \angle -45^\circ$$

c) $C = -5 + j7$

$$z = \sqrt{(-5)^2 + 7^2} = 8,6$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{7}{-5}\right) = -54,46^\circ$$

$$C = 8,6 \angle 125,54^\circ$$

Observação:

Se o número complexo deve aparecer no segundo, terceiro ou quarto quadrantes, devemos convertê-lo para estes quadrantes e determinar o ângulo apropriado a ser associado com o seu módulo.

No exemplo 4.4.1(c) o número $-5+j7$ aparece no 2º quadrante e portanto o ângulo de $-54,46^\circ$ deve ser associado a este quadrante ou seja $180^\circ + (-54,46^\circ) = 125,54^\circ$.

4.4.2. Conversão de Polar para Retangular

Para transformarmos um número complexo da forma polar para a forma retangular, desejamos obter o cateto adjacente x e o cateto oposto y a partir da hipotenusa z e do ângulo θ do **triângulo retângulo xyz** indicado na figura 4.1.3. Através das relações trigonométricas, temos:

$$\cos \theta = \frac{x}{z}$$

assim, o cateto adjacente que representa o número real x , pode ser dado por;

$$x = z \cdot \cos \theta$$

e

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{z}$$

assim, o cateto oposto que representa o número imaginário y , pode ser dado por;

$$y = z \cdot \operatorname{sen} \theta$$

concluimos que um número complexo na forma retangular é:

$$C = x + jy = z \cdot \cos \theta + j(z \cdot \operatorname{sen} \theta)$$

Exemplo 4.4.2: converter os números complexos da forma polar para a forma retangular:

a) $C = 200 \angle 45^\circ$

$$x = 200 \cdot \cos 45^\circ = 141,42$$

$$y = 200 \cdot \sen 45^\circ = 141,42$$

$$C = 141,42 + j141,42$$

b) $C = 30 \angle -240^\circ$

$$x = 30 \cdot \cos -240^\circ = -15$$

$$y = 30 \cdot \sen -240^\circ = 25,98$$

$$C = -15 + j25,98$$

4.5. OPERAÇÕES MATEMÁTICAS COM NÚMEROS COMPLEXOS

Para podermos operar algebricamente números complexos, devemos lembrar de algumas relações. Sabemos que, para um número imaginário:

$$j = \sqrt{-1}$$

fazendo:

$$j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

então:

$$j^2 = -1$$

e ainda:

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \left(\frac{j}{j}\right) = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j$$

então:

$$\frac{1}{j} = -j$$

4.5.1. Conjugado Complexo

O conjugado de um número complexo, representado por C^* , pode ser determinado simplesmente pela mudança do sinal da parte imaginária na forma retangular ou do sinal do ângulo na forma polar. Seja:

$$C = x + jy = z \angle \theta$$

então o conjugado C^* é dado por:

$$C^* = x - jy = z \angle -\theta$$

Exemplo 4.5.1: determine o conjugado dos números complexos:

$$a) C = 5 + j7 \quad \Rightarrow \quad C^* = 5 - j7$$

$$b) C = 100 \angle -30^\circ \quad \Rightarrow \quad C^* = 100 \angle +30^\circ$$

4.5.2. Recíproco ou Inverso de um número complexo

O recíproco ou o inverso de um número complexo, representado por C^{-1} é dado por:

$$C^{-1} = \frac{1}{C} = \frac{1}{x + jy} = \frac{1 \angle 0^\circ}{z \angle \theta}$$

Essa divisão de números complexos será estudada no item 4.5.5.

4.5.3. Adição e Subtração de números complexos

A adição (soma) ou subtração algébricas de números complexos **deve ser feita sempre na forma retangular**. Não se somam ou se subtraem números complexos na forma polar. Uma transformação deve ser feita antes desta operação algébrica.

Soma e Subtração algébrica de números complexos são feitas na forma retangular.

A regra para soma ou subtração de números complexos na forma retangular é:

Somam-se ou subtraem-se algebricamente as partes reais e as partes imaginárias, separadamente.

Assim:

$$C_1 + C_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$C_1 - C_2 = (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Exemplo 4.5.2: efetuar as operações algébricas com números complexos, sendo $C_1 = 3 + j4$ e $C_2 = 5 + j6$:

a) $C_3 = C_1 + C_2$:

$$C_3 = C_1 + C_2 = (3 + j4) + (5 + j6) = (3 + 5) + (j4 + j6) = 8 + j10$$

b) $C_3 = C_1 - C_2$:

$$C_3 = C_1 - C_2 = (3 + j4) - (5 + j6) = (3 - 5) + (j4 - j6) = -2 - j2$$

c) $C_3 = C_1 + C_2^*$:

$$C_3 = C_1 + C_2^* = (3 + j4) + (5 - j6) = (3 + 5) + (j4 - j6) = 8 - j2$$

4.5.4. Multiplicação de números complexos

A multiplicação de números complexos **deve ser feita na forma polar**. Não é recomendável a multiplicação na forma retangular, embora possa ser realizada.

Multiplicação de números complexos é feita na forma polar.

Consideremos dois números complexos na forma polar $C_1 = z_1 \angle \theta_1$ e $C_2 = z_2 \angle \theta_2$. Efetuemos a multiplicação:

$$C_1 \cdot C_2 = (z_1 \angle \theta_1) \cdot (z_2 \angle \theta_2)$$

Na forma trigonométrica:

$$\begin{aligned} C_1 \cdot C_2 &= z_1 \cdot (\cos \theta_1 + j \operatorname{sen} \theta_1) \cdot z_2 (\cos \theta_2 + j \operatorname{sen} \theta_2) = z_1 \cdot z_2 (\cos \theta_1 + j \operatorname{sen} \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + j \operatorname{sen} \theta_2) = \\ &= z_1 \cdot z_2 (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + j \cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 + j \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + j^2 \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) = \\ &= z_1 \cdot z_2 [(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) + j(\cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2)] = \end{aligned}$$

Das identidades trigonométricas conhecidas, temos:

$$\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 = \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)$$

Substituindo:

$$C_1 \cdot C_2 = z_1 \cdot z_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$C_1 \cdot C_2 = z_1 \cdot z_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

Portanto, a regra para multiplicação de números complexos na forma polar é:

Multiplicam-se os módulos e somam-se algebricamente os ângulos.

Assim:

$$C_1 \cdot C_2 = z_1 \angle \theta_1 \cdot z_2 \angle \theta_2 = z_1 \cdot z_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

Exemplo 4.5.3: efetuar as operações algébricas com números complexos, sendo $C_1 = 10 \angle 45^\circ$ e $C_2 = 20 \angle 30^\circ$.

a) $C_3 = C_1 \times C_2$:

$$C_3 = C_1 \times C_2 = 10 \angle 45^\circ \times 20 \angle 30^\circ = 10 \times 20 \angle (45^\circ + 30^\circ) = 200 \angle 75^\circ$$

b) $C_3 = C_1^* \times C_2$:

$$C_3 = C_1^* \times C_2 = 10 \angle -45^\circ \times 20 \angle 30^\circ = 10 \times 20 \angle (-45^\circ + 30^\circ) = 200 \angle -15^\circ$$

Também podemos multiplicar números complexos na forma retangular utilizando-se a propriedade distributiva. Assim:

$$\begin{aligned} C_1 \cdot C_2 &= (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = (x_1x_2) + j(x_1y_2) + j(y_1x_2) + j^2(y_1y_2) = \\ &= (x_1x_2) + j(x_1y_2) + j(y_1x_2) + (-1)(y_1y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + j \cdot (x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

$$C_1 \cdot C_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + j \cdot (x_1y_2 + x_2y_1)$$

Propriedade: o produto de um número complexo pelo seu conjugado é um número real. Seja $C = x + jy$. Assim:

$$C \cdot C^* = (x + jy) \cdot (x - jy) = x^2 - jxy + jxy - j^2y^2 = x^2 - (-1)y^2$$

$$C \cdot C^* = x^2 + y^2$$

O mesmo raciocínio é válido para a forma polar.

4.5.5. Divisão de números complexos

A divisão de números complexos deve ser feita na forma polar.

Divisão de números complexos é feita na forma polar.

A regra para divisão de números complexos na forma polar é:

Dividem-se os módulos e subtraem-se algebricamente os ângulos.

Assim:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{z_1 \angle \theta_1}{z_2 \angle \theta_2} = \frac{z_1}{z_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

Exemplo 4.5.4: efetuar as operações algébricas com números complexos, sendo $C_1 = 10 \angle 45^\circ$ e $C_2 = 20 \angle 30^\circ$.

a) $C_3 = C_1 / C_2$:

$$C_3 = C_1 / C_2 = 10 \angle 45^\circ / 20 \angle 30^\circ = 10/20 \angle (45^\circ - 30^\circ) = 0,5 \angle 15^\circ$$

b) $C_3 = C_1 / C_2^*$:

$$C_3 = C_2 / C_1^* = 20 \angle 30^\circ / 10 \angle -45^\circ = 20/10 \angle (30^\circ - (-45^\circ)) = 2 \angle 75^\circ$$

4.5.6. Potenciação de números complexos

Consideremos o complexo $C = z \angle \theta$. Dado o número natural não nulo "n", temos:

$$C^n = \langle C \cdot C \cdot \dots \cdot C \rangle_n = z \cdot z \cdot \dots \cdot z [\angle \theta + \angle \theta + \dots + \angle \theta]$$

$$C^n = z^n \angle (n \cdot \theta)$$

Esta equação é conhecida como *Fórmula de Moivre*.

Exemplo 4.5.5: Efetue as operações:

a) $C = (2 \angle 30^\circ)^3 = (2^3) \angle (3 \cdot 30^\circ) = 8 \angle 90^\circ$

b) $C = (3 + j4)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot j4 + (j4)^2 = 9 + j24 + (j^2 \cdot 16) = 9 + j24 + (-1 \cdot 16) = -7 + j24$

4.6. EXERCÍCIOS

4.6.1. Represente os números complexos num mesmo plano cartesiano e obtenha a forma polar:

a) $C_1 = 5 + j2$

b) $C_2 = 4 - j3$

c) $C_3 = -j4$

d) $C_4 = -1 - j1$

e) $C_5 = 2$

f) $C_6 = -7 - j7$

g) $C_7 = -4\sqrt{3} - \sqrt{-16}$

4.6.2. Represente os números complexos num mesmo plano cartesiano e obtenha a forma retangular:

a) $C_1 = 5 \angle 30^\circ$

b) $C_2 = 2 \angle 180^\circ$

- c) $C_3=4\angle 45^\circ$
- d) $C_4=3\angle -60^\circ$
- e) $C_5=6\angle -150^\circ$
- f) $C_6=2,5\angle 90^\circ$

4.6.3. Determine o argumento e o módulo dos números complexos a seguir e os represente geometricamente no plano cartesiano:

- a) $C=j4$
- b) $C = -2 + j2\sqrt{3}$

4.6.4. Faça as operações algébricas com os números complexos:

- a) $(6+j5)+(2-j)=$
- b) $(6-j)+(4+j2)=$
- c) $(2,5+j3,5)-(2,5-j4,5)$
- d) $(4-j).(2+j3)=$
- e) $(1+j).(2-j).(3+j2)=$
- f) $(5+j2)^2=$
- g) $(2+j).(j)^{-1}=$

4.6.5. Calcule a e b, para que $(4+j5)-(-1+j3)=a+jb$

4.6.6. Determine o conjugado de:

- a) $C=(3+j)-(2+j5)=$
- b) $C=(1-j).(3+j).(-1)=$

4.6.7. Determine o $C \in \mathbf{C}$, tal que: $2C+3C^*=4-j$

4.6.8. Dados os complexos $C_1=3+j4$ e $C_2=6-j8$, determine:

- a) $|C_1.C_2|=$
- b) $|C_1-C_2|=$
- c) $|C_1/C_2|=$
- d) $|(2C_1+C_2)/(C_1+C_2)|=$

4.6.9. Seja $C_1 = 2\angle 135^\circ$, $C_2 = 4\angle 60^\circ$, $C_3 = 1\angle -30^\circ$ e $C_4=3-j4$, calcule:

- a) $(C_1.C_2)/C_3=$
- b) $C_1+C_2-C_3=$
- c) $(C_1.C_3^*)-C_2=$
- d) $C_2/C_4=$
- e) $C_1-C_4^*=$
- f) $(3C_1.C_2).(C_3.4C_4)/(2C_2-C_3)=$

4.6.10. Prove matematicamente (literal - sem números) que o produto de um número complexo na forma polar pelo seu conjugado é um número real igual ao módulo ao quadrado.

4.6.11. Prove matematicamente (literal – sem números) que $\frac{C_1}{C_2} = \frac{z_1\angle\theta_1}{z_2\angle\theta_2} = \frac{z_1}{z_2}\angle(\theta_1 - \theta_2)$.

4.6.12. Calcule:

- a) $j^4=$

b) $j^5 =$

c) $(1+j)^8 =$

d) $(1+j3)^5 =$

e) $(1-j)^{-2} =$

5. REPRESENTAÇÃO FASORIAL DE SINAIS SENOIDAIS

Neste capítulo será apresentada uma prática ferramenta gráfica e matemática que permitirá e facilitará as operações algébricas necessárias à aplicação dos métodos de cálculo e análise de circuitos elétricos que operem com **sinais senoidais de tensão e de corrente de mesma frequência**. Este método faz uso de um vetor radial girante denominado **Fasor**.

5.1 INTRODUÇÃO

Já sabemos que podemos representar sinais de tensão e de corrente alternadas senoidais através das seguintes expressões matemáticas no chamado **domínio do tempo ou domínio temporal**, pois são função do tempo:

- Tensão instantânea: $v(t) = V_p \cdot \text{sen}(w.t \pm \theta_v)$
- Corrente instantânea: $i(t) = I_p \cdot \text{sen}(w.t \pm \theta_i)$

Estas expressões matemáticas para tensões e correntes, na **forma trigonométrica** do domínio do tempo, não permitem métodos práticos para a análise de circuitos elétricos, pois não são fáceis de serem algebricamente operadas.

Exemplo 5.1.1: Sabemos que potência elétrica é o produto da tensão pela corrente. Obtenha a equação da potência elétrica multiplicando a tensão instantânea $v(t)=10\text{sen}(100t)$ pela corrente instantânea $i(t)=2\text{sen}(100t-60^\circ)$:

Resolvendo, temos:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = 10\text{sen}(100t) \cdot 2\text{sen}(100t + 60^\circ) = 20 \cdot \text{sen}(100t) \cdot \text{sen}(100t + 60^\circ)$$

A questão é: como multiplicar os dois senos de ângulos diferentes?

A resposta está no uso das chamadas identidades trigonométricas. Algumas delas estão apresentadas no anexo A1. Para o produto de senos temos:

$$\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

Assim:

$$p(t) = 20 \cdot \text{sen}(100t) \cdot \text{sen}(100t + 60^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(100t - 100t + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(100t + 100t + \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$p(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(200t + \frac{\pi}{3}\right) \right] = 0,5 \cdot \left[0,5 - \cos\left(200t + \frac{\pi}{3}\right) \right] = -0,25 \cos\left(200t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Podemos concluir que uma simples multiplicação de dois sinais para a determinação da potência num circuito não é uma operação tão simples e evidente.

Exemplo 5.1.2: Sabemos que numa malha de um circuito elétrico devemos somar as tensões. Some os dois sinais de tensão na forma trigonométrica e obtenha as formas de onda, sendo $v_1(t)=10\text{sen}(100t)$ e $v_2(t)=15\text{sen}(100t+60^\circ)$.

Para somarmos algebricamente tensões senoidais e obtermos a forma de onda resultante uma solução pouco prática e trabalhosa seria fazer esta operação de soma ponto a ponto das curvas senoidais, ao longo do eixo das abscissas, como mostra a figura 5.1.1. Outra solução seria operarmos os sinais buscando alguma identidade trigonométrica. De ambas as formas, concluímos que esta tarefa não é simples, nem rápida e nem evidente.

$$v_1(t) + v_2(t) = 10\text{sen}(100t) + 15\text{sen}(100t + 60^\circ)$$

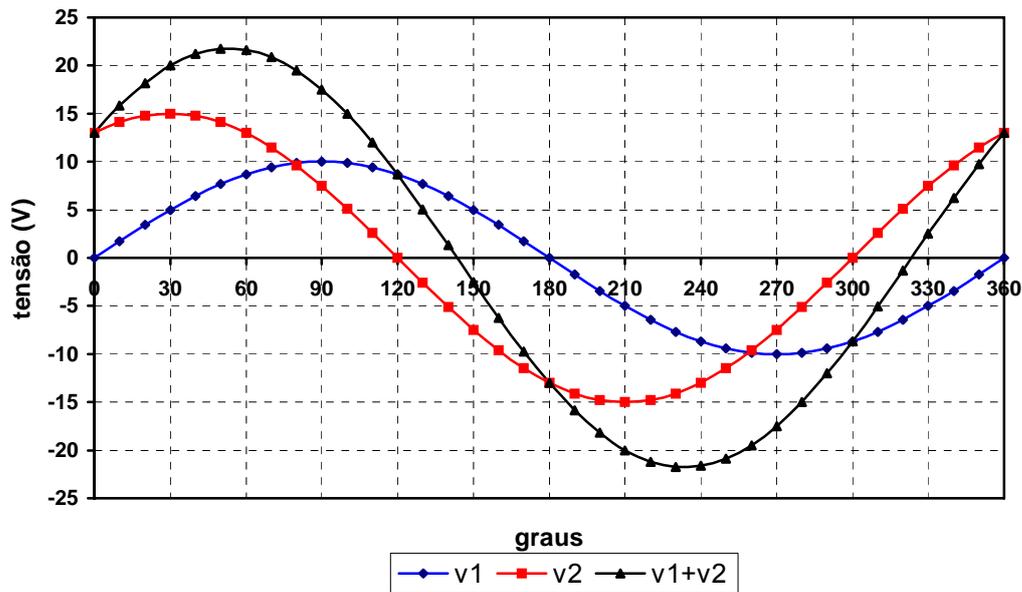


Figura 5.1.1 – soma de senóides ponto a ponto

Precisamos, portanto, encontrar uma ferramenta que nos facilite as operações algébricas com sinais senoidais de tensões e correntes para que possamos fazer uma análise rápida e correta de circuitos elétricos.

No estudo do capítulo 3, pudemos perceber que os parâmetros mais importantes dos sinais de tensão e de corrente alternadas são:

- Valor de Pico: V_p e I_p
- Valor Eficaz: V_{ef} e I_{ef}
- Velocidade Angular: ω
- Frequência: f
- Período: T
- Fase Inicial: θ

Sabemos que todo o sistema elétrico do Brasil opera a uma mesma frequência (60Hz). O que diferencia em algumas regiões são as tensões (110; 127; 220; 227V, por exemplo). Da mesma forma, no método que será apresentado, se todas as fontes de tensão e de corrente de um circuito possuírem a **mesma frequência angular** ω poderemos omitir ω na representação da tensão “v” e da corrente “i”.

Seja, por exemplo, o circuito da figura 5.1.2, com três fontes de tensão alternadas operando com mesmas frequências angulares $\omega=200\text{rad/s}$, onde:

- $v_1(t) = 10.\text{sen}(200.t + 0^\circ)$
- $v_2(t) = 5,0.\text{sen}(200.t + 45^\circ)$
- $v_3(t) = 20.\text{sen}(200.t + 90^\circ)$

Todas as três fontes apresentam a mesma frequência angular $\omega = 200 \text{ rad/s}$. Desta forma, ω não diferencia as tensões e pode ser omitida na representação de v_1 , v_2 e v_3 . A diferenciação entre estas tensões deverá ser feita, então, em função da tensão de pico V_p (ou da tensão eficaz V_{ef}) e do ângulo de fase inicial θ de cada fonte.

Será apresentado neste capítulo, um método para representação de sinais senoidais, de mesma frequência, que permita facilidade nas operações algébricas necessárias à análise e cálculo de circuitos de corrente alternada. Esse método é chamado **Representação Fasorial de Sinais Senoidais**.

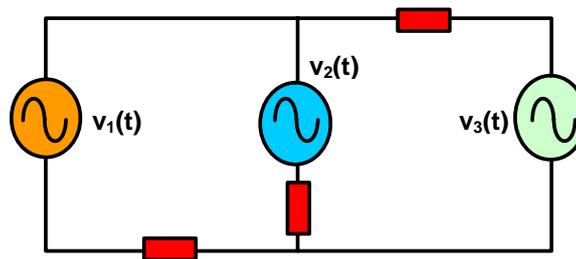


Figura 5.1.2: circuito com três fontes de tensão operando à mesma frequência [1]

5.2. FASOR

Do estudo da Física, sabemos que um ponto se deslocando em um movimento circular uniforme (movimento harmônico) pode ser representado através de suas projeções num plano cartesiano formando uma senóide, como mostra a figura 5.2.1. A recíproca também é verdadeira, ou seja, uma senóide pode ser representada pelas projeções de seus pontos como um ponto girando em um movimento circular uniforme.

Um movimento harmônico giratório pode ser descrito por uma senóide e vice-versa.

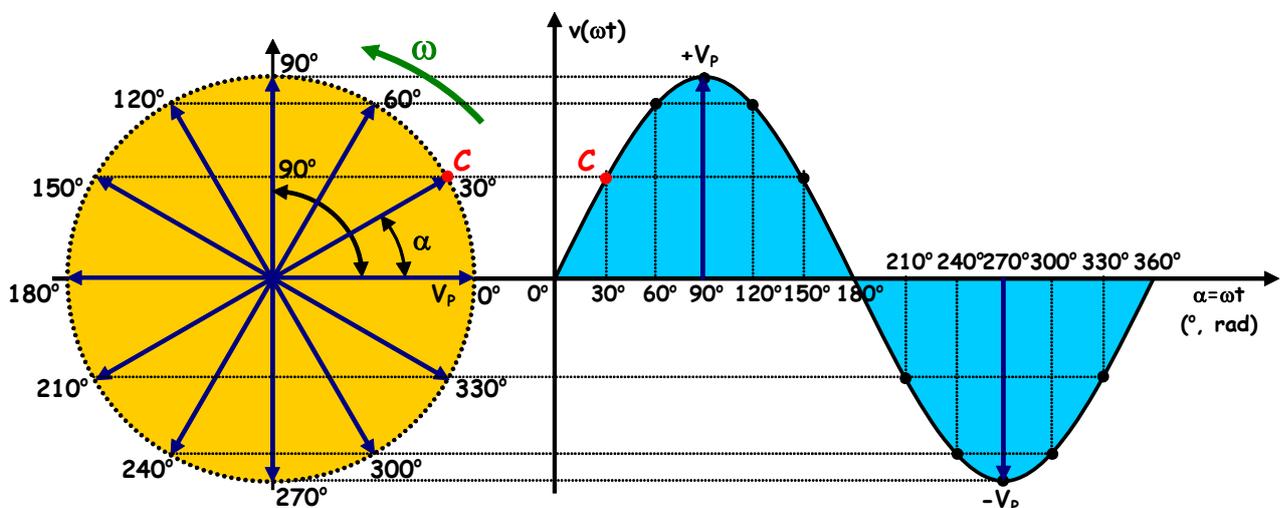


Figura 5.2.1: Projeções de valores instantâneos de um sinal senoidal [3]

Cada ponto de uma senóide pode ser representado por um vetor de módulo constante numa posição diferente, como indicado na figura 5.2.1. A medida que a senóide é descrita o vetor assume posições diferentes. Quando a senóide completa um ciclo, o vetor descreveu um giro completo e se encontra na mesma posição inicial novamente. Este vetor é, portanto, um **vetor girante**. Se o ciclo da senóide foi descrito num dado intervalo de tempo (período T), o vetor deu uma volta completa no mesmo período da senóide. Assim, podemos concluir que para uma dada frequência f do sinal senoidal, o movimento harmônico (giratório) do vetor possui a mesma frequência e, portanto o vetor gira no **sentido anti-horário** com a mesma frequência ou velocidade angular ω da senóide.

Analisando a figura 5.2.1 podemos observar que o ponto C, em qualquer posição angular do seu movimento giratório, forma um **vetor radial girante** cujo módulo é constante e igual ao valor de pico (amplitude) da senóide. Então:

Uma senóide pode ser descrita por um vetor radial girante com módulo igual à sua amplitude (valor de pico) e mesma frequência angular ω

A cada ciclo completado da senóide, o vetor radial girante volta à sua posição inicial. Se observarmos a projeção do valor da senóide no instante inicial $t=0$ ou na posição angular inicial $\alpha=\omega t=0^\circ$, o vetor radial girante está posicionado a um determinado ângulo em relação ao eixo x. Após um período T (360°) o valor estará na mesma posição de partida. Podemos observar que este ângulo corresponde ao ângulo de fase inicial θ da senóide.

A cada período ou ciclo completado o vetor radial girante está sempre na mesma posição angular inicial θ .

Se o ciclo da senóide iniciar **adiantado**, o ângulo de fase inicial θ_0 é **positivo**. Se o ciclo da senóide iniciar **atrasado**, o ângulo de fase inicial θ_0 é **negativo**, conforme ilustra a figura 5.2.2.

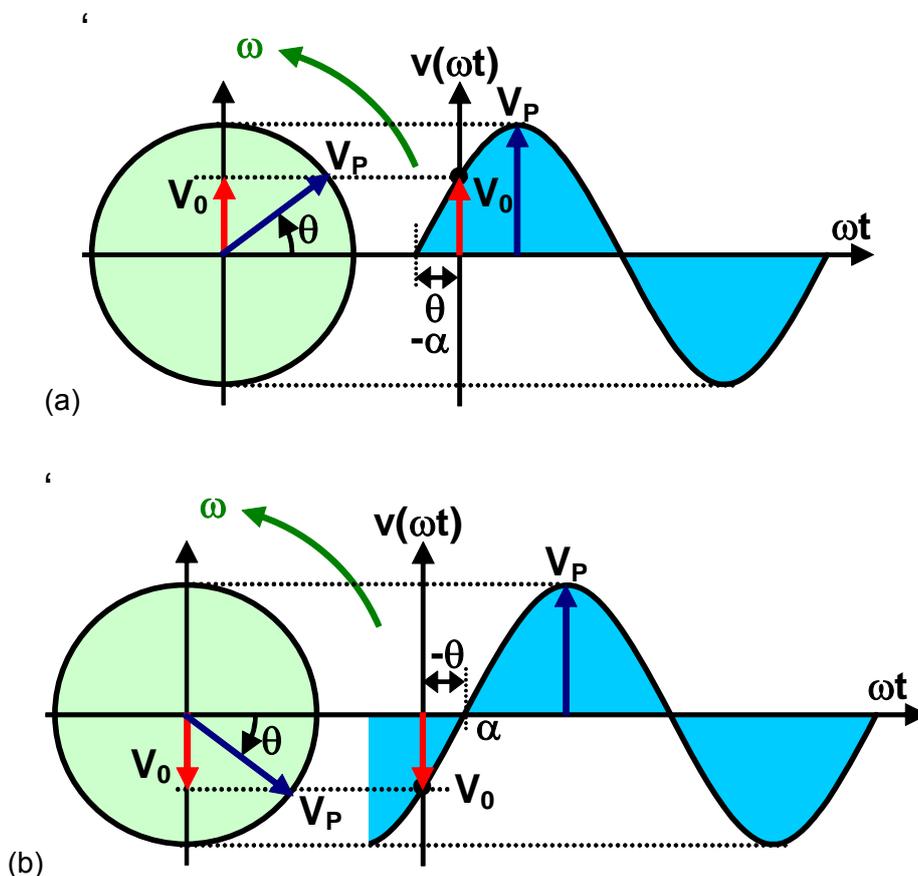


Figura 5.2.2: ângulo inicial do vetor radial girante: (a) adelantado, θ positivo; (b) atrasado, θ negativo [3]

Considerando que este vetor radial:

- gira à mesma frequência angular ω constante da senóide de origem;
- possui mesma frequência f e período que a senóide de origem;
- a cada volta se encontra na mesma posição inicial correspondente ao ângulo de fase inicial θ da senóide de origem
- possui um módulo constante e igual ao valor de pico V_p da senóide de origem;

Então esse vetor girante possui os mesmos parâmetros que descrevem a senóide e considerando uma dada frequência, para defini-lo basta o seu módulo e o seu ângulo de fase inicial. A este vetor radial girante chamamos de **Fasor**.

Fasor é um vetor radial girante com frequência ω , com módulo igual ao valor de pico V_p e com ângulo de fase inicial θ , que representa uma senóide de iguais parâmetros.

Assim, os sinais senoidais de tensão e corrente também podem ser representados através de vetores girantes, chamados **Fasor Tensão** e **Fasor Corrente**, como indica a figura 5.2.2.

Um fasor pode ser entendido como um vetor preso em uma das suas extremidades e girando, como os ponteiros de um relógio, à uma velocidade angular ω dada em radianos por segundo. Se a extremidade presa do vetor girante for a origem de um plano cartesiano x-y pode-se traçar as projeções x e y de cada instante do deslocamento de sua extremidade livre (ponta da seta) neste plano, como mostra a figura 5.2.1. A projeção do fasor no eixo y é uma função seno que representa a amplitude instantânea da senóide resultante, como ilustra a figura 5.2.3. A amplitude máxima (valor de pico) corresponderá ao módulo do fasor. Assim, a projeção y pode ser dada pela função senoidal:

$$y = v(t) = V_p \cdot \text{sen } \omega \cdot t \quad \text{ou} \quad y = v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen } \alpha$$

e os valores instantâneos (amplitudes) podem ser calculados da seguinte forma:

$$\alpha = 0^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen } 0^\circ = 0$$

$$\alpha = 30^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen } 30^\circ = 0,5 \cdot V_p$$

$$\alpha = 60^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen } 60^\circ = 0,866 \cdot V_p$$

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen } 90^\circ = 1 \cdot V_p$$

$$\alpha = 120^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen } 120^\circ = 0,866 \cdot V_p$$

$$\alpha = 150^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen } 150^\circ = 0,5 \cdot V_p$$

$$\alpha = 180^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen } 180^\circ = 0$$

$$\alpha = 210^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen } 210^\circ = -0,5 \cdot V_p$$

$$\alpha = 240^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen } 240^\circ = -0,866 \cdot V_p$$

$$\alpha = 270^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen } 270^\circ = -1 \cdot V_p$$

$$\alpha = 300^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen } 300^\circ = -0,866 \cdot V_p$$

$$\alpha = 330^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen } 330^\circ = -0,5 \cdot V_p$$

$$\alpha = 370^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen } 370^\circ = 0$$

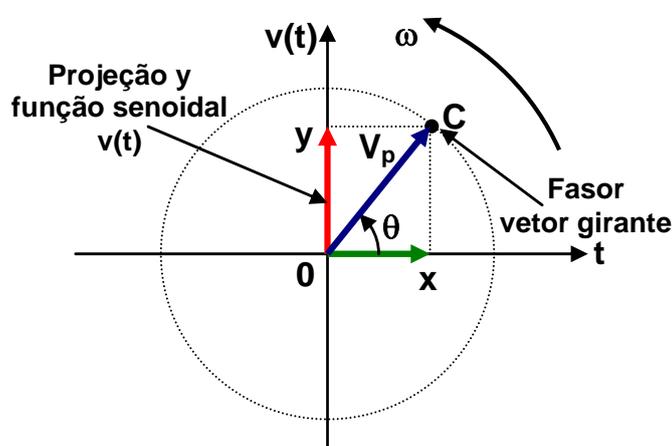


Figura 5.2.3: Diagrama Fasorial e as projeções do fasor de um sinal senoidal.

Os fasores são representados graficamente através de **diagramas fasoriais**, como mostra a figura 5.2.3. Se o diagrama fasorial representar apenas a posição do fasor no instante inicial, o seu módulo corresponde ao segmento **OC** na figura 5.2.3 e representa o valor de pico da senóide. O ângulo desse fasor corresponde ao ângulo de fase inicial θ da senóide. A projeção sobre o eixo x representa a amplitude da senóide no instante inicial $t=0$. Portanto, a função que este fasor representa é:

$$v(\alpha) = V_p \cdot \text{sen}(\alpha \pm \theta)$$

ou em função do tempo:

$$v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega.t \pm \theta)$$

Exemplo 5.2.1: Representar graficamente os sinais senoidais através do diagrama fasorial e de sua projeção senoidal:

$$v(t) = 10 \cdot \text{sen}(100t + 0^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = 5 \cdot \text{sen}(100t + 45^\circ) \text{ A}$$

Solução: O fasor V correspondente ao sinal senoidal $v(t)$ deve ser posicionado sobre o eixo x , pois o seu ângulo de fase inicial é $\theta=0^\circ$, e deve ter módulo igual a 10 unidades da escala adotada, como mostra a figura 5.2.4. O fasor I correspondente ao sinal senoidal $i(t)$ deve ser posicionado a $+45^\circ$ a partir do eixo x e deve ter módulo de 5 unidades da escala adotada, como mostra a figura 5.2.4.

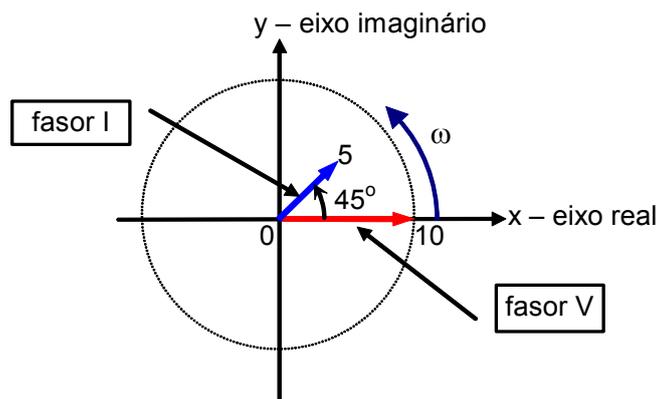


Figura 5.2.4: diagrama fasorial para os exemplos 5.2.1 e 5.2.2.

Observação: Um diagrama fasorial pode conter um ou vários Fasores (vários sinais senoidais) desde que sejam todos de **mesma frequência**.

Exemplo 5.2.2: Do diagrama fasorial da figura 5.2.4, obter a defasagem entre os sinais senoidais correspondentes aos fasores V e I :

Solução: o fasor corrente I está adiantado de 45° do fasor tensão, pois $\phi=45^\circ-0^\circ=45^\circ$. Também podemos dizer que a tensão está atrasada de 45° da corrente.

Exemplo 5.2.3: Um fasor de tensão de módulo 10 descreve uma rotação completa em 0,02s partindo da posição inicial -30° . Determine:

- o diagrama fasorial para o instante inicial e obtenha o comportamento senoidal desse sinal;
- o ângulo em que a tensão é 10V.
- a frequência angular e a expressão matemática para as variações instantâneas desse sinal;
- o valor da tensão no instante $t=0$ s;

Solução: o fasor tem módulo de 10V e parte de -30° (ou $-\pi/6$ rad). Sua representação gráfica fica como apresentada na figura 5.2.5(a). Como a fase inicial é de $\theta=-30^\circ$ a senóide começa o seu semiciclo positivo no ângulo $\alpha=+30^\circ$.

O valor de pico positivo (10V) ocorrerá em $90^\circ + \alpha = 120^\circ$ e assim por diante, como mostra o gráfico da figura 5.2.5(b).

Como a rotação é completada após 0,02s, a frequência angular pode ser determinada por:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,02} = 314,16 \text{ rad/s}$$

A função instantânea para este sinal é dada por:

$$v(t) = V_P \text{sen}(\omega t + \theta) = 10 \text{sen}\left(314,16 \cdot t - \frac{\pi}{6}\right)$$

No instante $t=0$ s a função senoidal assume o valor:

$$v(t) = 10 \text{sen}\left(314,16 \cdot t - \frac{\pi}{6}\right) = 10 \text{sen}\left(314,16 \cdot 0 - \frac{\pi}{6}\right) = 10 \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 10 \cdot 0,5 = 5$$

Também podemos obter o valor inicial de $v(t)$ para $t=0$ através da projeção do fasor sobre o eixo vertical (y) do diagrama fasorial:

$$v(0) = y(0) = 10 \cdot \cos(-30^\circ) = 10 \cdot (-0,5) = 5$$

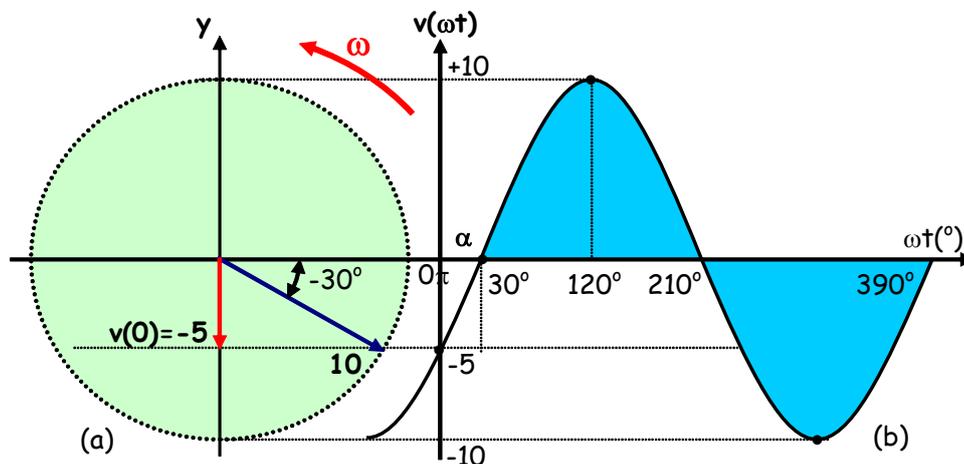


Figura 5.2.5: solução do exemplo 5.2.3. (a) diagrama fasorial e (b) forma de onda

5.3. REPRESENTAÇÃO FASORIAL COM NÚMEROS COMPLEXOS

Como vimos, um método mais prático e eficiente para representação gráfica de sinais senoidais faz uso de um vetor radial girante denominado **Fasor**. Para que estes fasores permitam facilidade nas operações algébricas dos sinais que eles representam, como na aplicação dos métodos de análise de circuito elétricos de corrente alternada, é necessária uma ferramenta matemática para representar tais fasores. Esta ferramenta faz uso dos números complexos e de sua álgebra.

Como estudado no capítulo 4, um número complexo representado na **forma retangular** (ou forma cartesiana) é um número composto por uma parte real e uma parte imaginária:

$$C = x + jy$$

Um número complexo representado na **forma polar** é composto por um módulo de um vetor radial e um ângulo (ou argumento).

$$C = z \angle \theta$$

onde:

x – número real

y – número imaginário

j – operador imaginário ($j = \sqrt{-1}$)

z – módulo

θ - ângulo ou argumento.

Um fasor é um vetor radial traçado desde a origem cujo módulo (comprimento) é constante e corresponde ao valor de pico do sinal senoidal e cujo ângulo formado com o eixo das abscissas corresponde à fase inicial θ do sinal senoidal no instante inicial $t = 0$.

Se este fasor, que é um vetor radial, for traçado num plano cartesiano complexo, como mostrado na figura 5.3.1, podemos perceber que ele forma um triângulo retângulo com o eixo real x e podemos representá-lo matematicamente através de números complexos, tanto na forma polar como na forma retangular.

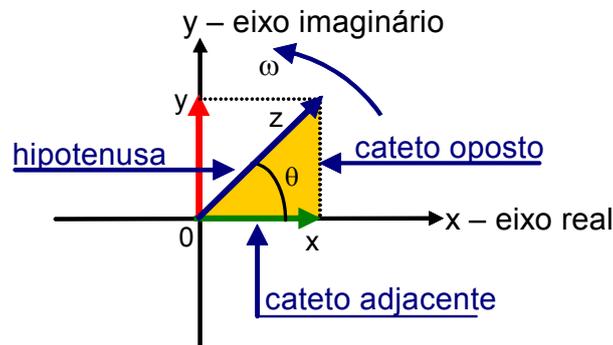


Figura 5.3.1 – representação de um fasor no plano cartesiano complexo.

Portanto, uma função senoidal no domínio do tempo dada por:

$$v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm \theta)$$

pode, então ser passada para o chamado **domínio fasorial** e transformada num **fasor** representado através de um número complexo na forma polar, tal que o módulo corresponde a um valor fixo que identifique a senóide como o valor de pico ou o valor eficaz (que é proporcional ao valor e pico e constante) e o argumento corresponde ao ângulo de fase inicial:

$$\dot{V} = V_p \angle \pm \theta$$

ou

$$\dot{V} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \angle \pm \theta$$

$$\dot{V} = V_{\text{ef}} \angle \pm \theta$$

onde:

\dot{V} - fasor representado por um número complexo;

V_p – valor de pico (amplitude) do sinal senoidal de origem;

θ - ângulo de fase inicial do sinal senoidal de origem.

Um fasor é um número complexo na forma polar.

Importante: como o valor eficaz (rms), em vez do valor de pico, é usado mais freqüentemente na especificação e análise de dispositivos e circuitos elétricos de corrente alternada e que, para sinais senoidais é válida e constante a relação:

$$V_p = V_{ef} \cdot \sqrt{2},$$

a representação fasorial de sinais senoidais de tensão e corrente pode usar o valor eficaz como módulo do fasor, permanecendo o mesmo ângulo de fase para o argumento. Assim:

Fasor Tensão:	$\dot{V} = V_{ef} \angle \theta_v$
----------------------	------------------------------------

onde:

\dot{V} - fasor tensão (Volts);

V_{ef} – tensão eficaz (Volts);

θ_v – ângulo de fase inicial do sinal senoidal de tensão (graus ou radianos)

A aplicação desse raciocínio também é válido para sinais senoidais de corrente, então:

Fasor Corrente:	$\dot{I} = I_{ef} \angle \theta_i$
------------------------	------------------------------------

onde:

\dot{I} - fasor corrente (Ampères);

I_{ef} – corrente eficaz (Ampères);

θ_i – ângulo de fase inicial do sinal senoidal de corrente (graus ou radianos)

Como um fasor é um número complexo, também podemos representá-lo na forma retangular, usando as projeções x e y, como mostra a figura 5.3.1. A conversão de um fasor na forma polar para a forma retangular e vice-versa através dos procedimentos apresentados no capítulo 4.

Exemplo 5.3.1: Na figura 5.2.4, considerando-se o eixo x como eixo real e o eixo y como eixo imaginário, representar os fasores através de números complexos, na forma polar e na forma retangular.

Solução: para o fasor V o seu módulo é 10 e o seu ângulo é 0° , então na forma polar:

$$\dot{V} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = 7,07 \angle 0^\circ \text{ V}$$

e para o fasor I o seu módulo é 5 e o seu ângulo é $+45^\circ$, então na forma polar:

$$\dot{I} = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle +45^\circ = 3,54 \angle +45^\circ \text{ A}$$

para obtermos a forma retangular devemos obter as projeções dos fasores nos eixos x e y. Assim para o fasor V:

$$x = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \cos 0^\circ = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,07$$

$$y = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \sen 0^\circ = 0$$

então:

$$\dot{V} = 7,07 + j0 \text{ V}$$

e para o fasor I:

$$x = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \cos 45^\circ = 2,5$$

$$y = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \text{sen}45^\circ = 2,5$$

então

$$\dot{i} = 2,5 + j2,5 \text{ A}$$

Exemplo 5.3.2: transforme para o domínio fasorial os sinais senoidais:

$$\text{a) } v(t) = 311 \cdot \text{sen}(377 \cdot t) \text{ V} \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\text{b) } i(t) = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(\omega t + 30^\circ) \text{ A} \quad \Rightarrow \quad \dot{i} = 10 \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$\text{c) } v(t) = 50 \cdot \cos(\omega t - 15^\circ) \text{ mV} \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = \frac{50}{\sqrt{2}} \angle 75^\circ \text{ mV}$$

Exemplo 5.3.3: transforme para o domínio do tempo os seguintes fasores:

$$\text{a) } \dot{i} = 110 \angle 60^\circ \mu\text{A} \quad \Rightarrow \quad i(t) = 110 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(\omega t + 60^\circ) \mu\text{A}$$

$$\text{b) } \dot{V} = 20 \angle -45^\circ \text{ V} \quad \Rightarrow \quad v(t) = 20 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(\omega t - 45^\circ) \text{ V}$$

5.4. OPERAÇÕES MATEMÁTICAS COM FASORES E DIAGRAMAS FASORIAIS

A representação fasorial é importante na análise de circuitos elétricos pois permite realizar facilmente diversas operações matemáticas entre tensões, correntes e potências, sem usar a função do domínio do tempo (expressões trigonométricas) ou a representação gráfica da onda.

A **representação trigonométrica** permite algumas operações matemáticas usando equações chamadas identidades trigonométricas, mas dificultam os cálculos.

Considerando que sinais senoidais de tensão e de corrente podem ser representados através de fasores e estes, por sua vez, podem ser representados por números complexos, podemos operá-los através da álgebra aplicável aos números complexos. Feito isso podemos converter novamente o fasor resultante para o domínio do tempo e encontrarmos novamente uma função senoidal. A figura 5.4.1 representa esse procedimento.

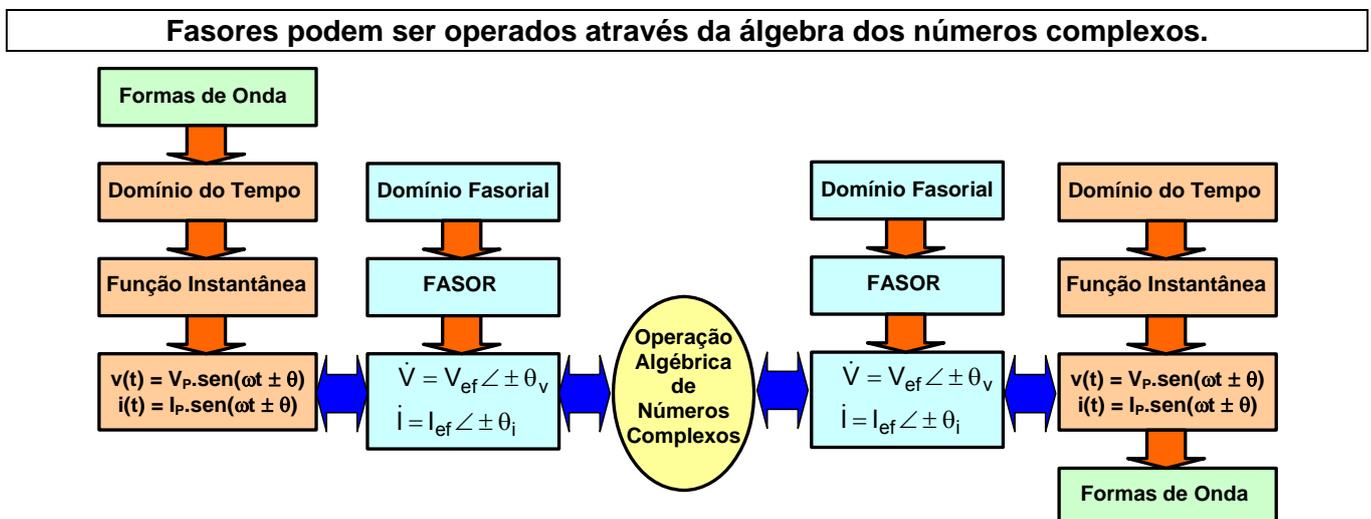


Figura 5.4.1 – seqüência para operações algébricas de sinais senoidais usando fasores.

Observação: Na notação fasorial a função seno é sempre a referência e a frequência não é representada, portanto:

A álgebra fasorial para sinais senoidais é aplicável somente para sinais de mesma frequência.

A representação fasorial através de números complexos na forma retangular e na forma polar, permite todas as operações matemáticas mais direta e facilmente e segue as mesmas regras para operações com números complexos estudadas em matemática.

Observação: É possível transformar números complexos da forma de polar para a forma retangular e vice-versa. Por exemplo, podemos transformar um fasor tensão na forma polar para a forma retangular e vice-versa, como demonstrado na figura 5.4.2.

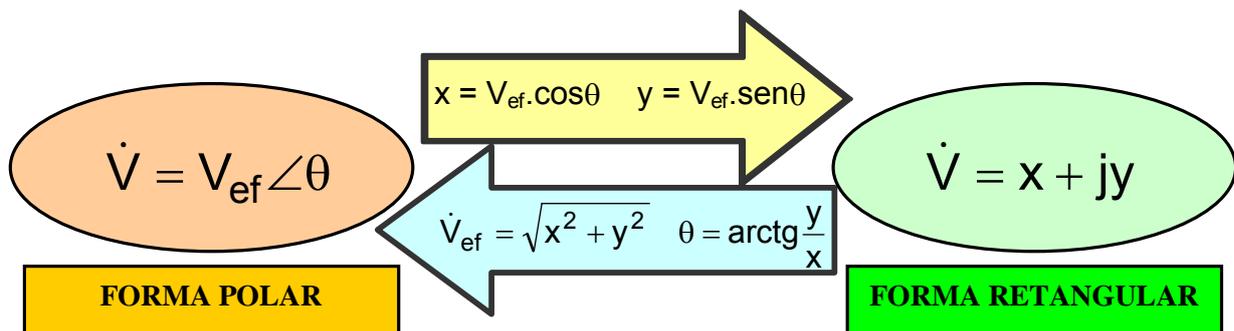


Figura 5.4.2 – transformação de polar em retangular e vice versa.

O diagrama fasorial permite somente operações gráficas de adição e subtração. Elas podem ser realizadas pelo mesmo processo usado para soma e subtração de vetores através do Método do Paralelogramo. Assim como para os vetores, podemos efetuar a soma de dois fasores de forma gráfica ou analítica, como mostra a figura 5.4.3:

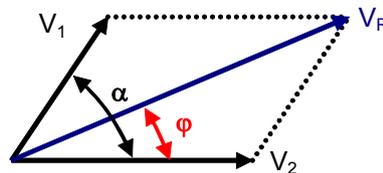


Figura 5.4.3 – soma de fasores pelo método do paralelogramo

Analiticamente, efetuamos a soma através da aplicação da equação trigonométrica:

$$V_R = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos \alpha}$$

O ângulo do fasor resultante pode ser dado por:

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{V_2 \cdot \sin \alpha}{V_1 + V_2 \cdot \cos \alpha} \right)$$

Exemplo 5.4.1: some e subtraia os sinais senoidais $v_1(t) = 20 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(377t + 45^\circ)$ e $v_2(t) = 40 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(377t - 30^\circ)$:

Solução: transformando em fasores, temos: $\dot{V}_1 = 20 \angle 45^\circ \text{ V}$ e $\dot{V}_2 = 40 \angle -30^\circ \text{ V}$.

Como devemos somar e subtrair os sinais, devemos operar estes números complexos na forma retangular. Assim, transformando para a forma retangular:

$$\dot{V}_1 = 14,14 + j14,14 \text{ V e } \dot{V}_2 = 34,64 - j20 \text{ V.}$$

Fazendo a operação de soma temos:

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = (14,14 + j14,14) + (34,64 - j20) = (14,14 + 34,64) + j(14,14 - 20) = 48,78 - j5,86 \text{ V}$$

Fazendo a operação de subtração temos:

$$\dot{V}_1 - \dot{V}_2 = (14,14 + j14,14) - (34,64 - j20) = (14,14 - 34,64) + j(14,14 + 20) = -20,5 + j34,14 \text{ V}$$

Transformando os resultados das operações para a forma polar, obtemos os fasores:

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 49,13 \angle -6,85^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_1 - \dot{V}_2 = 39,82 \angle 120^\circ \text{ V}$$

Reescrevendo os sinais senoidais no domínio do tempo, temos:

$$v_1(t) + v_2(t) = 49,13 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t - 6,85^\circ) \text{ V}$$

$$v_1(t) - v_2(t) = 39,82 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t + 120^\circ) \text{ V}$$

A partir dos sinais senoidais no domínio do tempo, as formas de onda podem ser traçadas, como indica a figura 5.4.4.

Podemos perceber como a álgebra fasorial facilita as operações com os sinais senoidais que, na forma trigonométrica, apresentam maior complexidade.

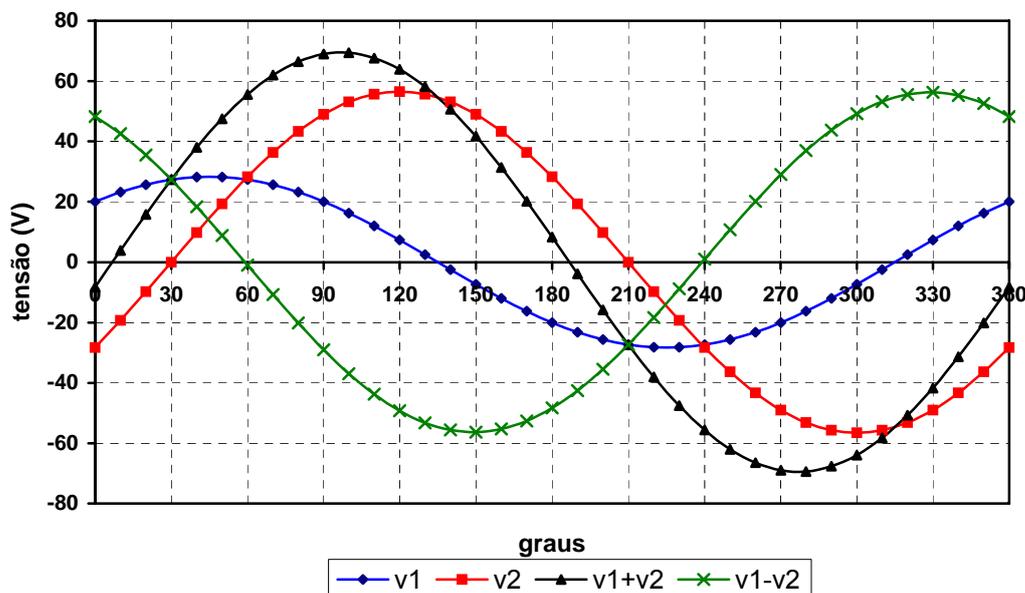


Figura 5.4.4 – gráfico para o exemplo 5.4.1.

Exemplo 5.4.2: Some os fasores do exemplo 5.4.1 aplicando as equações trigonométricas.

$$V_R = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos \alpha} = \sqrt{20^2 + 40^2 + 2 \cdot 20 \cdot 40 \cdot \cos 75^\circ} = 49,13$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{V_2 \cdot \text{sen} \varphi}{V_1 + V_2 \cdot \cos \varphi} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{20 \cdot \text{sen} 75}{40 + 20 \cdot \cos 75} \right) = 23,15^\circ$$

este ângulo é o ângulo entre a resultante e o vetor V_1 , então deve ser corrigido para obtermos o ângulo a partir do eixo x:

$$\phi = -30^\circ + 23,15^\circ = -6,85^\circ$$

então a resultante é:

$$\dot{V}_R = 49,13 \angle -6,85^\circ$$

A figura 5.4.5 mostra a soma gráfica dos fasores do exemplo 5.4.2.

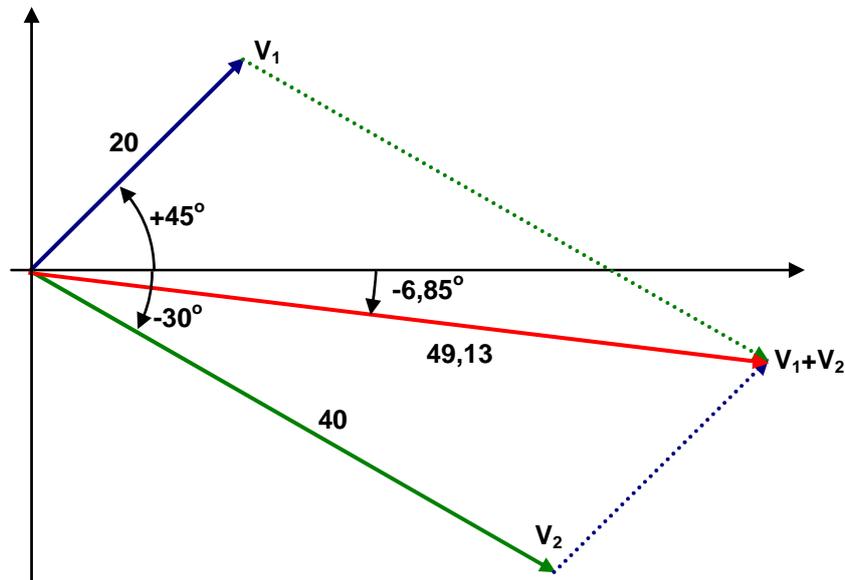


Figura 5.4.5 – Soma gráfica dos fasores do exemplo 5.4.2.

5.5. TABELA RESUMO

De acordo com o que estudamos, podemos concluir que há quatro maneiras de representarmos um sinal senoidal: através do gráfico da forma de onda, do diagrama fasorial, da expressão matemática trigonométrica e dos fasores.

A **forma de onda** é a representação mais visual, mostrando a variação periódica do sinal através dos gráficos em função do tempo ou em função do ângulo. O osciloscópio é o instrumento utilizado para visualizarmos a forma de onda de um sinal elétrico de tensão.

O **diagrama fasorial** é uma forma gráfica simplificada de representarmos o sinal senoidal, permitindo fazermos operações gráficas de soma e subtração entre vários sinais de tensão ou entre sinais de corrente.

A expressão matemática na **forma trigonométrica** representa a função de forma completa, mostrando todos os detalhes do sinal e permite a determinação dos seus valores instantâneos.

A representação de sinais senoidais através dos **fasores** utiliza os números complexos e é a forma mais simplificada da função, contendo apenas a amplitude e o ângulo de fase inicial do sinal. Essa representação permite facilmente operações de soma, subtração, multiplicação e divisão entre vários sinais elétricos.

A tabela 5.5.1 apresenta um resumo das representações matemáticas para os sinais senoidais de tensão e corrente.

Tabela 5.5.1 – Representações Matemáticas de Sinais Senoidais

	Tensão (V)	Corrente (A)
Valor Instantâneo Domínio do Tempo Forma Trigonométrica	$v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm \theta_v)$	$i(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm \theta_i)$
Fasor Domínio Fasorial Forma Polar	$\dot{V} = V_{\text{ef}} \angle \theta_v$	$\dot{I} = I_{\text{ef}} \angle \theta_i$
Fasor Domínio Fasorial Forma Retangular (Cartesiana)	$\dot{V} = V_{\text{ef}} \cdot \cos \theta_v + j \cdot V_{\text{ef}} \cdot \text{sen} \theta_v$	$\dot{I} = I_{\text{ef}} \cdot \cos \theta_i + j \cdot I_{\text{ef}} \cdot \text{sen} \theta_i$
Valor Eficaz (Médio Quadrático, RMS)	$V_{\text{ef}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$	$I_{\text{ef}} = \frac{I_p}{\sqrt{2}}$

5.6. EXERCÍCIOS:

5.6.1. Determine os fasores para os seguintes sinais senoidais e os represente através do diagrama fasorial:

- $v_1(t) = 15 \cdot \text{sen}(120 \cdot \pi \cdot t + 30^\circ)$
- $v_2(t) = \sqrt{2} \cdot 115 \cdot \text{sen}\left(100 \cdot \pi \cdot t - \frac{2\pi}{3}\right)$
- $v_1(t) = 311 \cdot \text{sen}(377 \cdot t)$

5.6.2. Dados os gráficos e funções abaixo [1]:

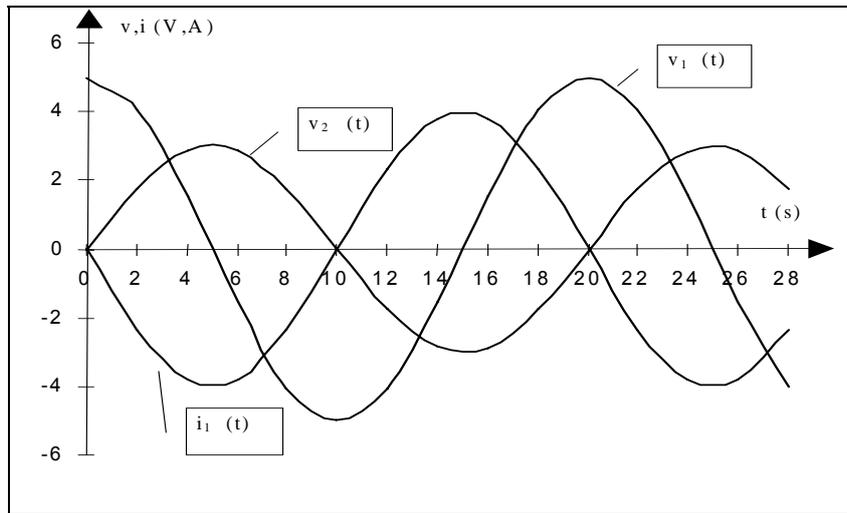
- determine o período, frequência, velocidade angular, fase inicial, valor de pico, pico a pico, valor eficaz e valor médio;
- tome um sinal como referência e verifique as defasagens em cada grupo de sinais;
- represente os sinais através de fasores (forma polar e retangular) e elabore o diagrama fasorial para cada conjunto de sinais de tensão e corrente;

I) $v_1(t) = 8,0 \text{sen}(500t + 25^\circ)\text{V}$; $v_2(t) = 4,5 \text{sen}(500t)\text{V}$; $i_1(t) = 1,0 \text{sen}(500t - 135^\circ)\text{A}$

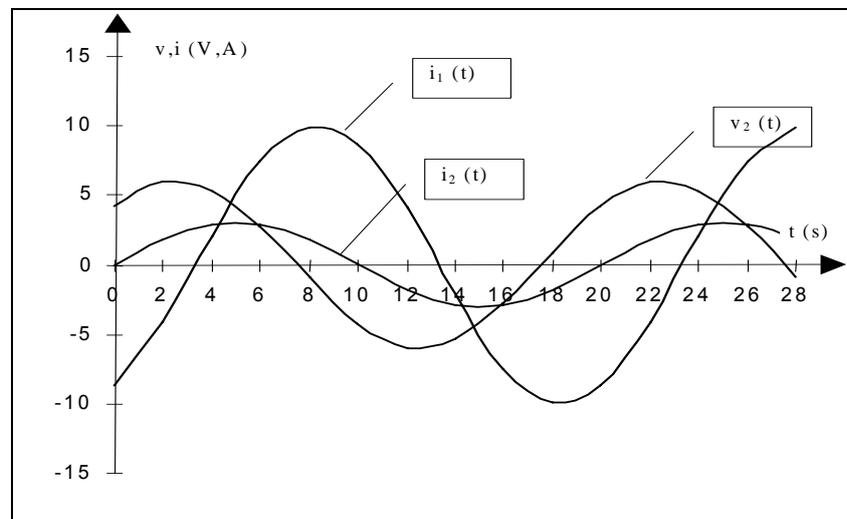
II) $i_1(t) = 10 \text{sen}(400t + 60^\circ)\text{A}$; $i_2(t) = 8,0 \text{sen}(400t - 45^\circ)\text{A}$; $v_1(t) = 12 \text{sen}(400t - 45^\circ)\text{V}$; $i_3(t) = 7,0 \text{sen}(400t)\text{A}$.

III) $v_1(t) = 5,0 \text{sen}(400t)\text{V}$; $v_2(t) = 2,0 \text{sen}(400t - 90^\circ)\text{V}$; $i_1(t) = 2,5 \text{sen}(400t - 30^\circ)\text{A}$;
 $v_3(t) = 3,5 \text{sen}(400t + 180^\circ)$

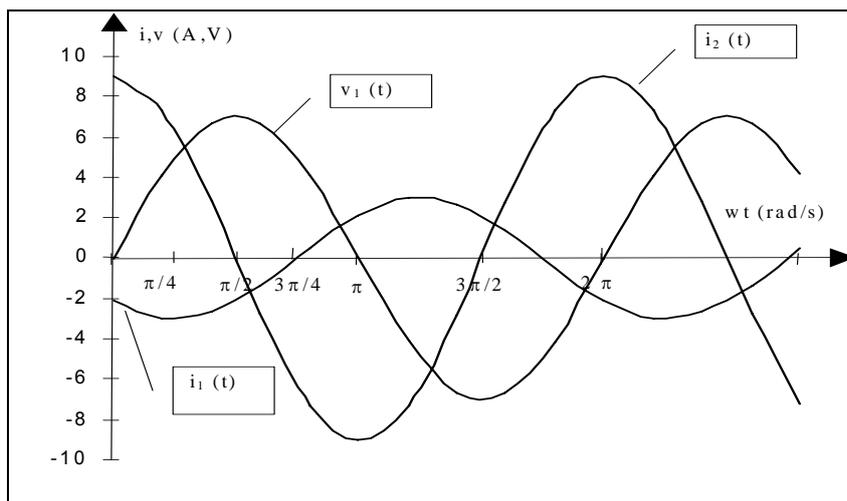
IV)



V)



VI)



5.6.3. Considere os fasores de mesma frequência $\hat{V}_1 = 100\angle 0^\circ$, $\hat{V}_2 = 50\angle -30^\circ$ e $\hat{I}_1 = 10\angle -45^\circ$.

- Faça a soma e a subtração algébrica das tensões, na forma fasorial;
- Faça, algebricamente, o produto de cada tensão pela corrente
- Faça a soma e a subtração das tensões graficamente, através do diagrama temporal (formas de onda) e através do diagrama fasorial;

5.6.4. Considerando o diagrama fasorial abaixo:

- Escreva as expressões matemáticas no domínio do tempo (instantâneas);
- Trace as curvas senoidais;
- Determine a defasagem e a frequência dos sinais.

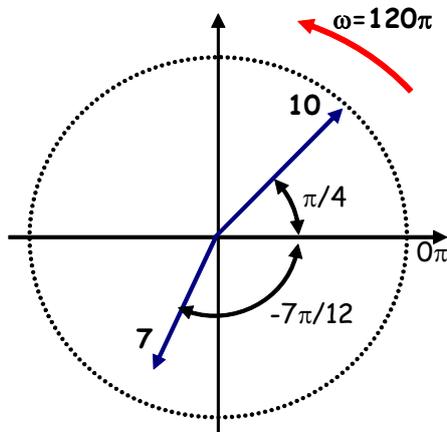


Figura 5.6.4 – diagrama fasorial para o problema 5.6.4.

6. RELAÇÕES ENTRE TENSÃO E CORRENTE ALTERNADAS NOS ELEMENTOS PASSIVOS DE CIRCUITOS

Sabemos, do estudo da física, que uma relação entre causa e efeito não ocorre sem uma oposição, ou seja, a relação entre causa e efeito é uma oposição:

$$\text{Oposição} = \frac{\text{Causa}}{\text{Efeito}}$$

Nos circuitos elétricos a causa pode ser entendida como a tensão e o efeito o estabelecimento de uma corrente elétrica. A resistência elétrica é, portanto, uma oposição.

Neste capítulo serão estudadas as relações existentes entre as tensões e as correntes alternadas senoidais nos Resistores, nos Capacitores e nos Indutores e sua forma de representação matemática, além de como a frequência dos sinais senoidais afeta as características de comportamento desses elementos. Esse comportamento é determinado pela característica de oposição desses componentes quando submetidos a sinais de tensão e corrente senoidais.

A forma de onda senoidal tem particular importância pois associa naturalmente fenômenos matemáticos e físicos relacionados aos circuitos elétricos:

A forma de onda senoidal é a única forma de onda alternada cuja forma não é afetada pelas características de respostas dos elementos resistivos, indutivos e capacitivos.

Em outras palavras, se a tensão num resistor, indutor ou capacitor for senoidal, a corrente resultante em cada um também terá características senoidais (e vice-versa). Se uma outra forma de onda for aplicada, a resposta terá forma de onda diferente daquela aplicada.

A notação fasorial apresentada, juntamente com as relações entre tensão e corrente nos elementos passivos, permitirá usar para circuitos com sinais senoidais de tensão e corrente, os mesmos teoremas e conceitos adotados na análise de circuitos em corrente contínua. A essa análise chamamos de Resposta Senoidal dos Elementos Passivos em **regime permanente**. Em regime permanente pois consideramos passado o efeito transitório dos circuitos, ou seja, sem alteração de sua condição operacional.

6.1. RESISTOR EM CORRENTE ALTERNADA

Já foi estudado que um resistor oferece uma oposição à passagem da corrente elétrica em um circuito, devido à sua resistência elétrica. Em um circuito elétrico, como mostra a figura 6.1.1, a relação entre causa e efeito é a resistência elétrica e é expressa pela **relação entre tensão e corrente num resistor**, chamada de **Lei de Ohm**.

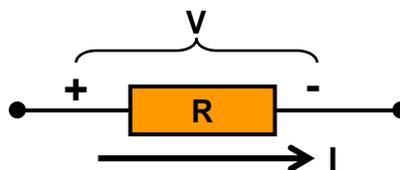


Figura 6.1.1 – tensão e corrente em um resistor.

Assim:

$$R = \frac{V}{I}$$

onde:

R - resistência do resistor (Ω);

V - tensão nos terminais do resistor (V);

I - corrente que atravessa o resistor (A);

Seja o circuito da figura 6.1.2, no qual uma fonte de tensão alternada senoidal $v(t)=V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_v)$ alimenta um resistor R:

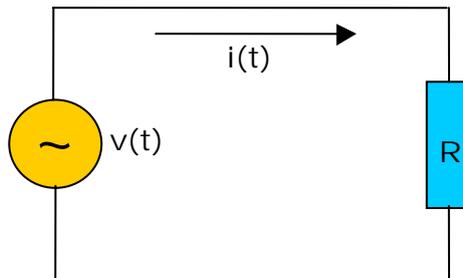


Figura 6.1.2 – circuito resistivo alimentado por uma tensão senoidal.

Pela Lei de Ohm, a relação entre causa e efeito é dada por:

$$R = \frac{v(t)}{i(t)}$$

Sabemos que a resistência elétrica é uma característica dos materiais e pode, para nossos estudos, ser considerada constante. Assim:

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_v)}{R} = \frac{V_p}{R} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_v)$$

Como também é válida a relação:

$$I_p = \frac{V_p}{R}$$

Então:

$$i_R(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_v)$$

Observa-se que a única diferença existente entre as funções senoidais $v(t)$ e $i(t)$ é o **valor de pico**. **Não há diferença nos ângulos de fases das duas funções**. Isto ocorre porque num resistor a corrente é sempre diretamente proporcional à tensão, ou seja: tensão zero, corrente zero; tensão dobra, corrente dobra e assim por diante. Assim:

$$\theta_I = \theta_V$$

Assim:

$$i_R(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_I)$$

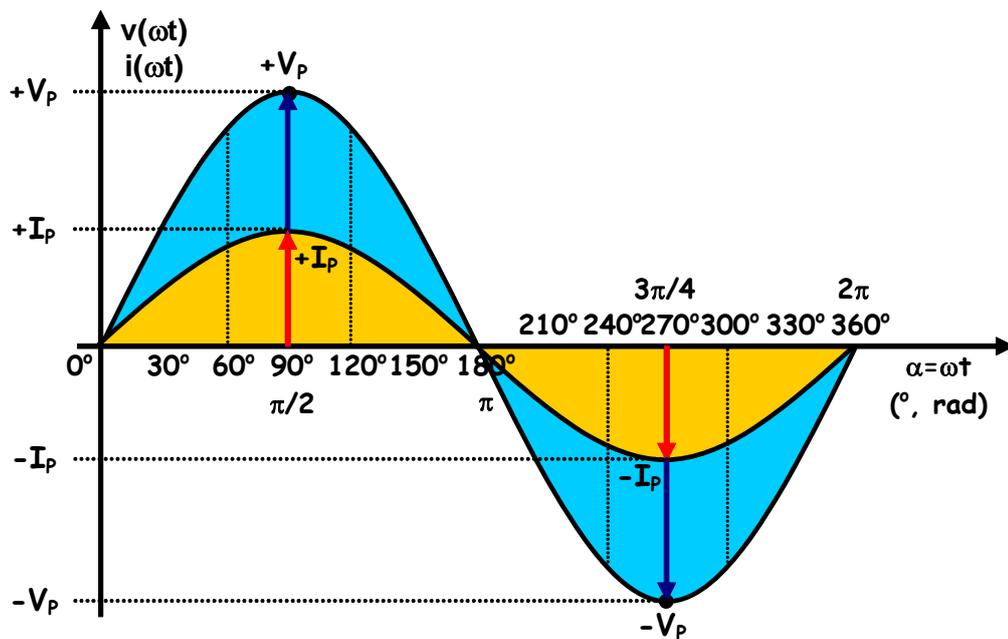


Figura 6.1.3 – Corrente em fase com a tensão em um circuito resistivo.

Se traçarmos as funções tensão $v_R(t)$ e corrente $i_R(t)$ no resistor, como mostra o gráfico da figura 6.1.3, podemos concluir que **um resistor, quando submetido a uma tensão alternada, produz uma corrente elétrica com a mesma forma de onda, mesma frequência e mesma fase da tensão, porém, com amplitude que depende dos valores da tensão aplicada e da resistência, conforme a Lei de Ohm.**

Portanto, em um **circuito resistivo puro** de corrente alternada (CA) as variações na corrente ocorrem **em fase** com a variação da tensão aplicada.

Nos terminais de um resistor, a corrente está sempre em fase com a tensão:

$$\theta_v = \theta_i$$

No domínio fasorial a relação entre a tensão e a corrente é determinada por:

$$R = \frac{\dot{V}_R}{\dot{I}_R}$$

resolvendo para a corrente:

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{V}_R}{R}$$

Como R é um número real:

$$\dot{I}_R = \frac{V_{\text{Ref}} \angle \theta_V}{R \angle 0^\circ} = \frac{V_{\text{Ref}}}{R} \angle (\theta_V - 0^\circ)$$

Sabemos que o valor eficaz de um sinal CA corresponde a uma tensão contínua de mesmo valor sobre uma resistência. Então:

$$I_{\text{Ref}} = \frac{V_{\text{Ref}}}{R}$$

Assim:

$$\dot{I}_R = I_{\text{Ref}} \angle \theta_V$$

Podemos mais uma vez, portanto, concluir que **o ângulo da corrente no resistor é o mesmo da tensão**: $\theta_V = \theta_i$. Reescrevendo:

$$\dot{I}_R = I_{\text{Ref}} \angle \theta_i$$

Exemplo 6.1.1: A um resistor de 6Ω é aplicada uma tensão de senoidal de $12V_{\text{ef}}$, 60Hz e ângulo de fase inicial zero.

- Determine a expressão trigonométrica e o fasor para a tensão;
- Determine a expressão trigonométrica e o fasor para a corrente;
- Trace as formas de onda para $v(t)$ e $i(t)$;
- Trace o diagrama fasorial para a tensão e corrente.

Como a frequência é 60Hz, então a frequência angular é determinada por:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 60 = 377 \quad \text{rad/s}$$

Assim, podemos determinar a expressão da tensão instantânea:

$$v(t) = 12 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t + 0) = 16,97 \cdot \text{sen}(377 \cdot t) \quad \text{V}$$

E o fasor tensão:

$$\dot{V} = 12 \angle 0^\circ \quad \text{V}$$

O fasor corrente é determinado pela relação:

$$\dot{i} = \frac{\dot{V}}{R} = \frac{12 \angle 0^\circ}{6} = 2 \angle 0^\circ \quad \text{A}$$

A corrente instantânea é:

$$i(t) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t + 0) = 2,83 \cdot \text{sen}(377 \cdot t) \quad \text{A}$$

Com as duas formas trigonométricas para a tensão $v(t)$ e corrente $i(t)$, podemos atribuir valores para a variável tempo (t) e traçar as formas de onda com auxílio de um *software* de planilha eletrônica, como mostra a figura 6.1.4. Podemos perceber que a tensão e a corrente estão em fase, como era esperado.

A figura 6.1.5 apresenta o diagrama fasorial para a tensão e corrente no resistor. Mais uma vez percebemos que a tensão e a corrente estão em fase num circuito resistivo.

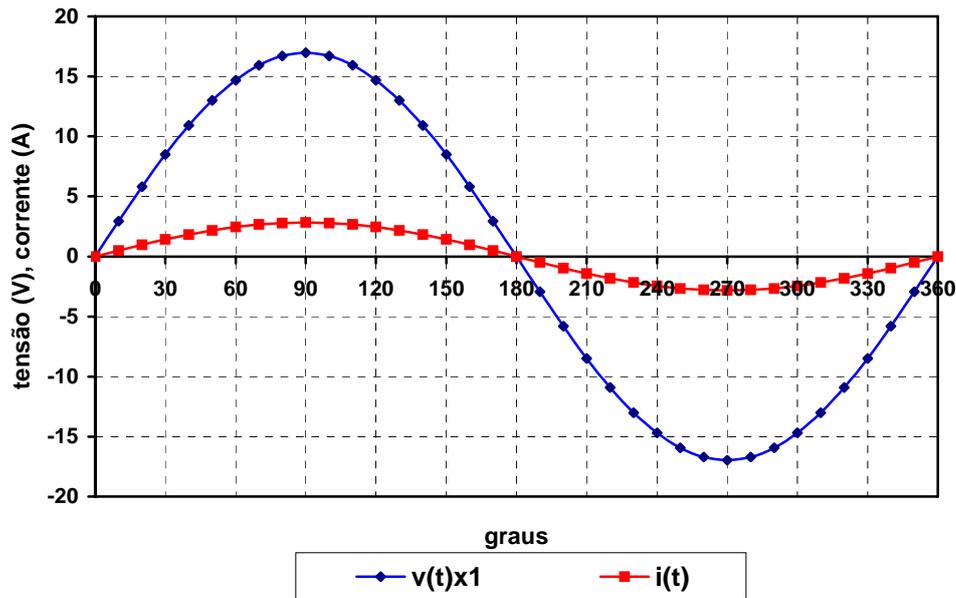


Figura 6.1.4 – Formas de onda de tensão e corrente em fase para o exemplo 6.1.1.

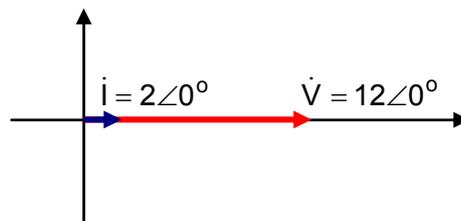


Figura 6.1.5 – Diagrama fasorial para o exemplo 6.1.1: tensão e corrente em fase no resistor.

Observação:

Estamos considerando neste estudo, **resistências ôhmicas constantes**, apesar de sabermos que a resistência pode variar com a tensão aplicada (não ôhmica) e com a temperatura.

Estamos considerando também que a resistência de um resistor é independente da frequência aplicada. Na verdade um resistor real apresenta uma certa capacitância parasita e indutância dos condutores que são sensíveis à frequência do sinal a ele aplicado. Geralmente os níveis de capacitância e indutância são tão pequenos que seu efeito real não é significativo até a faixa operacional de megahertz (MHz). Nesta faixa, a curva de resistência versus frequência para alguns resistores de filme de carbono é apresentada na figura 6.1.6. Podemos notar que os valores de resistência diminuem com o aumento da frequência e este comportamento é mais sensível para resistores de maior valor de resistência nominal.

Este comportamento se deve às componentes de capacitância e indutância intrínsecas ao resistor real e que são sensíveis à frequência, como será estudado nos itens posteriores.

Neste trabalho continuaremos considerando a resistência uma constante e também independente da frequência do sinal aplicado para simplificação das análises. Porém, o leitor deve ter em mente que estas considerações devem ser analisadas em circuitos de alta frequência.

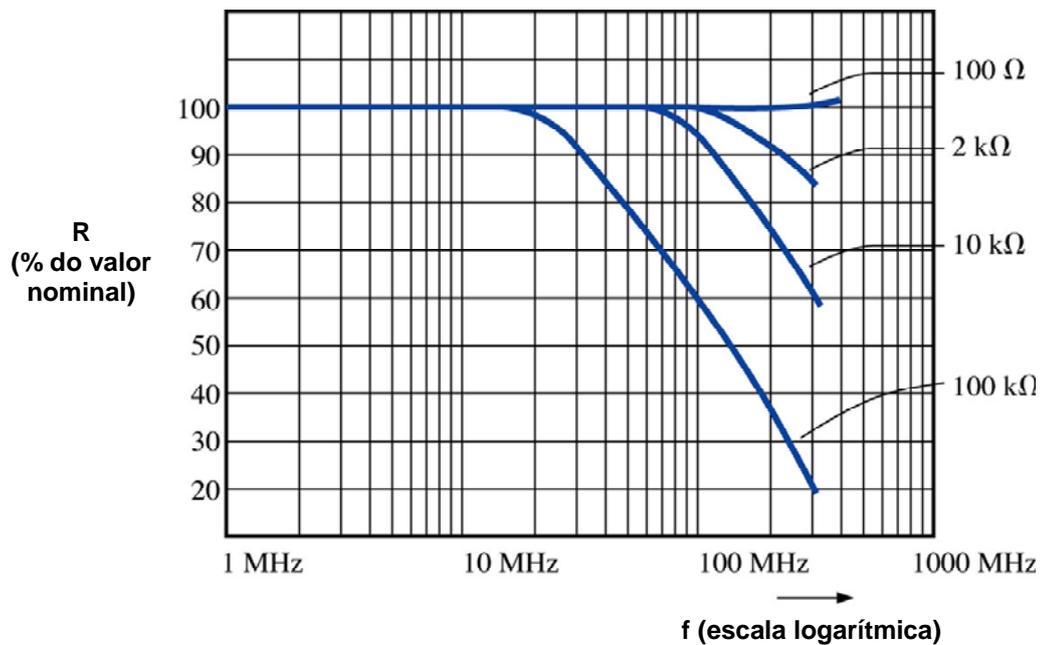


Figura 6.1.6 – Comportamento da resistência com a frequência [fonte: Boylestad].

6.1.1. Exercícios:

Dados os circuitos da figura 6.1.5, determine:

- O fasor tensão da fonte;
- a corrente fornecida pela fonte na forma trigonométrica e fasorial;
- a tensão e a corrente em cada resistor (forma trigonométrica e fasorial)
- formas de onda da tensão e corrente da fonte e em cada resistor em função do tempo num mesmo gráfico
- diagrama fasorial completo.

$$\text{Dados: } v_1(t) = 220.\text{sen}(377.t+90^\circ) ; v_2(t) = 100.\text{sen}(1000.t+0^\circ) ; v_3(t) = 100.\text{sen}(1000.t-60^\circ)$$

$$R_1=20\Omega ; R_2=30\Omega$$

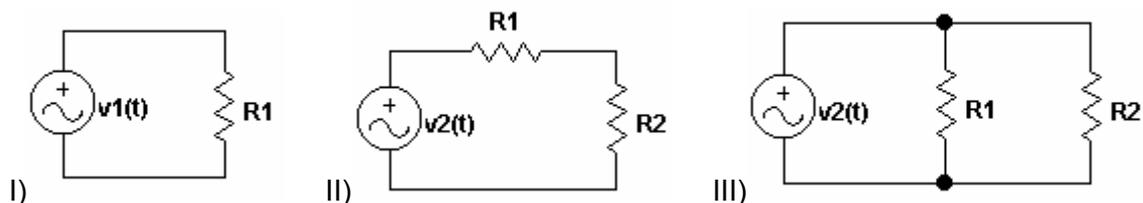


Figura 6.1.5 – circuitos para o exercício 6.1.1.

6.2. CAPACITOR EM CORRENTE ALTERNADA

Nos circuitos elétricos, o capacitor é um elemento capaz de armazenar energia elétrica. Sua constituição física é composta por duas placas condutoras metálicas, separadas por um material isolante chamado dielétrico.

Seu comportamento elétrico consiste em uma corrente elétrica (cargas elétricas) entrando em uma das placas do capacitor, obrigando a saída de igual corrente da outra placa por repulsão eletrostática. Decorrido algum tempo tem-se cargas armazenadas em ambas as placas. Este

acúmulo de cargas corresponde à uma energia armazenada na forma de campo elétrico existente entre as placas do capacitor. Estas cargas armazenadas produzem um campo elétrico de tal forma que se estabelece uma diferença de potencial dV (tensão) entre as placas do capacitor.

Um capacitor só admite corrente em seus terminais enquanto estiver sendo carregado ou descarregado. Quanto mais carga houver no capacitor maior será o campo elétrico criado e maior será a diferença de potencial (tensão) existente entre as placas.

A relação entre a quantidade de carga armazenada e a tensão admitida entre as placas de um capacitor é uma constante chamada **Capacitância**. Ou seja:

$$C = \frac{Q}{V} \quad [\text{Farad}]$$

Podemos comprovar matematicamente, do estudo dos capacitores que a energia armazenada no capacitor é dada por:

$$E_n = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2 \quad [\text{Joule}]$$

De acordo com o estudo do carregamento e descarregamento⁵ do capacitor, feito anteriormente e observando a figura 6.2.1, concluímos que:

- Em regime permanente, um **capacitor carregado** comporta-se como um **circuito aberto em tensão contínua constante**, mas permite a condução de corrente no circuito para tensão variável;
- A corrente admitida é diretamente proporcional à variação de tensão no tempo, sendo a capacitância C , a constante de proporcionalidade, pois:

$$C = \frac{dQ}{dv}$$

fazendo:

$$C = \frac{dQ}{dv} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{dt}{dv} = i(t) \cdot \frac{dt}{dv}$$

isolando $i(t)$, a corrente no capacitor em função do tempo é dada por:

$$i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C}{dt}$$

- **A tensão nos terminais de um capacitor não pode sofrer variações instantâneas bruscas.** Se ocorresse uma variação instantânea ($dt \rightarrow 0$) a corrente tenderia a um valor infinito [$i_C(t) \rightarrow \infty$], o que não é possível fisicamente. Por esse motivo dizemos que o **capacitor se opõe à variação de tensão**;
- A tensão acumulada nos terminais do capacitor é dada por:

$$v_C = \frac{1}{C} \cdot \int i_C \cdot dt$$

- **A corrente** no capacitor **pode variar instantaneamente**, como podemos observar na figura 6.2.1(c);
- Só existe corrente no ramo do capacitor, enquanto existir variação de tensão sobre ele (pois se $\Delta V \rightarrow 0$, então $i_C(t) \rightarrow 0$).
- Quando a corrente é máxima, a tensão é nula e quando a tensão é máxima a corrente é nula.

⁵ Este estudo é apresentado na referência bibliográfica: MUSSOI, F.L.R. **Capacitores**. Florianópolis: CEFET/SC, 2003. Disponível em: www.cefetsc.edu.br/mussoi

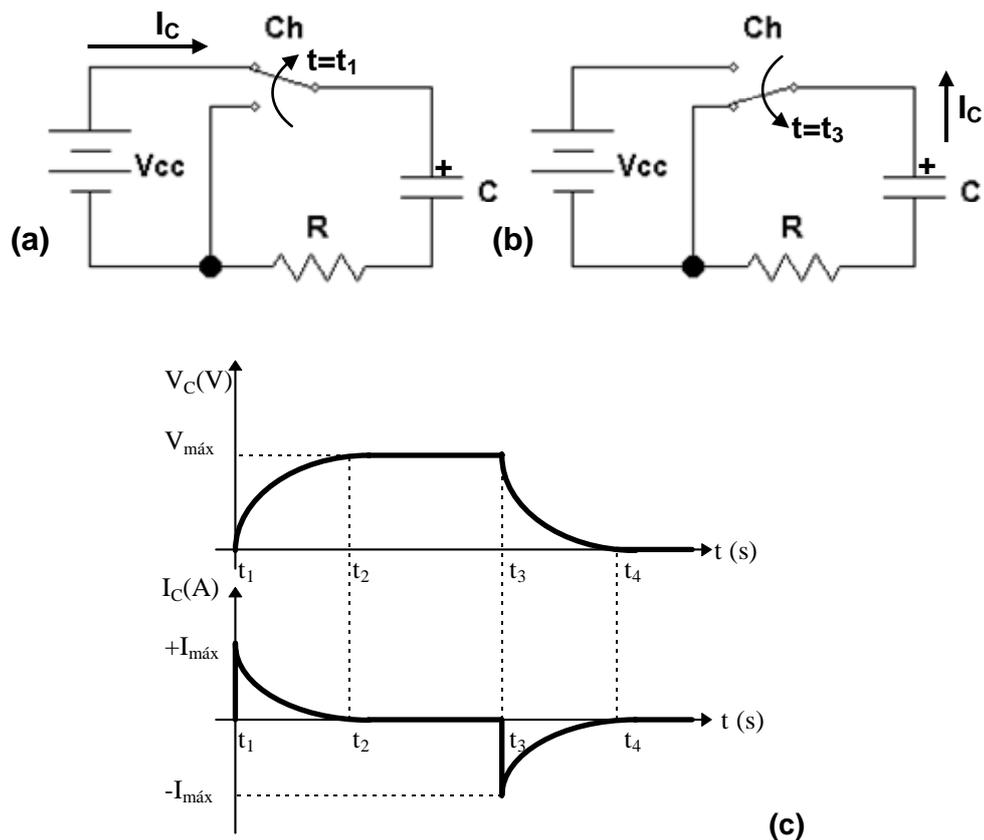


Figura 6.2.1 – Transitório CC de carga e descarga do capacitor: (a) circuito para análise do carregamento; (b) circuito para análise da descarga; (c) curva da Corrente e da Tensão no capacitor em função do tempo para carga e descarga.

Consideremos o circuito da figura 6.2.2 onde um capacitor está conectado a uma fonte de tensão alternada.

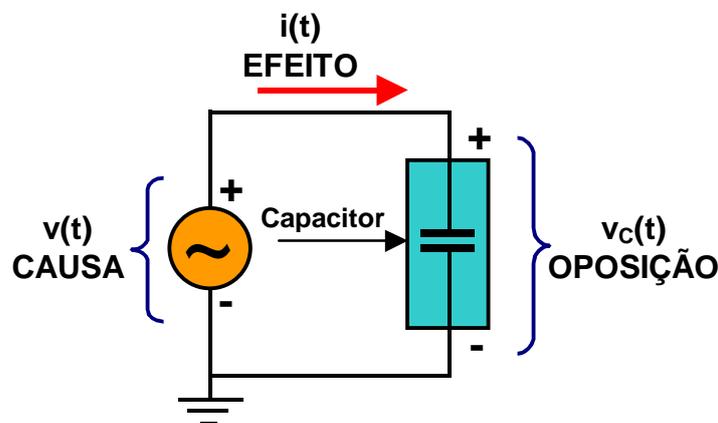


Figura 6.2.2 – capacitor alimentado por uma tensão alternada senoidal

Na figura 6.2.3, observando a curva da tensão alternada senoidal aplicada sobre o capacitor vemos que os momentos de maior variação da tensão ($\Delta V_c \rightarrow \text{máx.}$) ocorrem quando seu valor está próximo de zero e, portanto, nestes instantes teremos os maiores valores de corrente no ramo do capacitor. Por outro lado, nos instantes em que a tensão está próxima de seu valor máximo a sua variação é muito pequena ($\Delta V_c \approx 0$) o que implica em valor de corrente baixo ($I_c \rightarrow 0$).

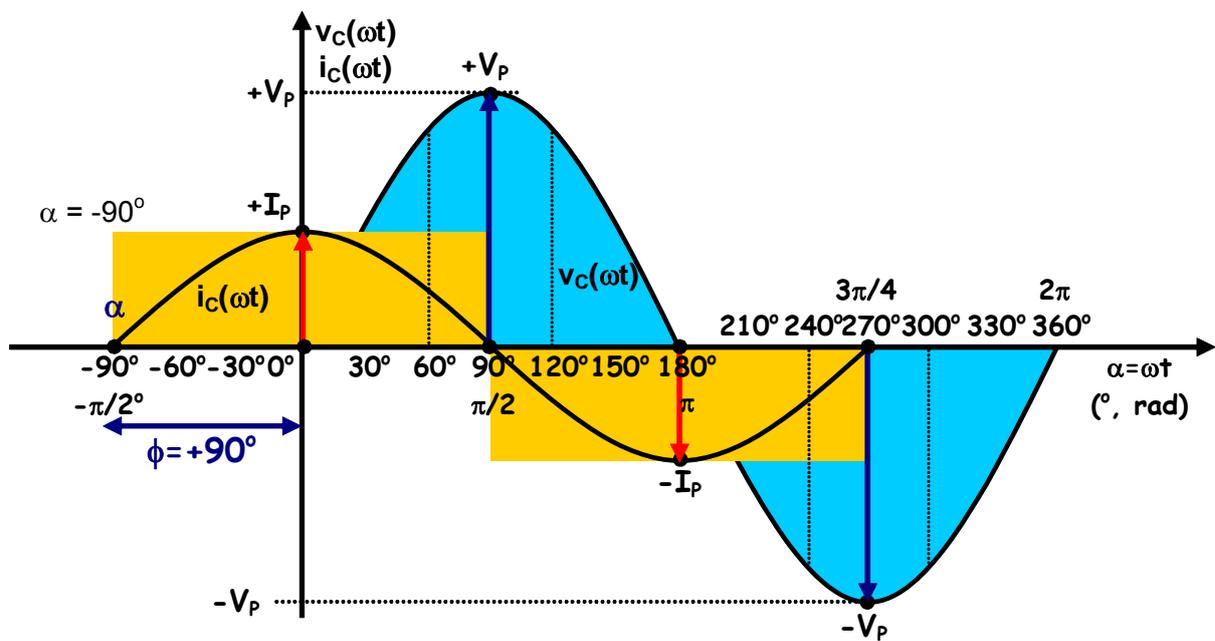


Figura 6.2.3 - Corrente e Tensão Senoidais num Capacitor Ideal: corrente adiantada de 90° da tensão.

Com base nesse raciocínio, se aplicarmos uma tensão senoidal a um capacitor, como mostra a figura 6.2.2, verificaremos que quando a tensão for crescente, a corrente assume seus valores máximos. Quando a tensão for máxima, a corrente é nula. A partir dessas observações podemos concluir que a corrente resultante no capacitor também é senoidal e apresenta uma defasagem de 90° com relação à tensão, como indica a figura 6.2.3. Portanto:

Nos terminais de um capacitor num circuito CA, a corrente sempre estará adiantada de 90° em relação à tensão.

Desta forma, a representação matemática da tensão e da corrente no capacitor, na forma trigonométrica e fasorial é a seguinte:

$$v_c(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + 0^\circ) \quad \text{ou} \quad \dot{V}_c = V_{ef} \angle 0^\circ$$

$$i_c(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + 90^\circ) \quad \text{ou} \quad \dot{I}_c = I_{ef} \angle 90^\circ$$

Seja o circuito da figura 6.2.2, vamos determinar a corrente no circuito para uma dada tensão no elemento capacitivo. Para circuitos capacitivos, a tensão nos terminais do capacitor é limitada pela taxa na qual as placas do capacitor podem ser carregadas ou descarregadas. Em outras palavras, uma variação instantânea na tensão sobre o capacitor é impedida pelo fato que há um requisito de tempo para carregá-lo (ou descarregá-lo). Assim:

$$V = \frac{Q}{C}$$

diferenciando:

$$dv = \frac{dQ}{C}$$

como $i_C = \frac{dQ}{dt}$, desenvolvendo e substituindo, temos:

$$dv = \frac{dQ}{C} = \frac{dQ}{C} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{dt}{C} = i_C \cdot \frac{dt}{C}$$

isolando i_C :

$$i_C = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

Como capacitância é uma medida da taxa com que um capacitor armazena carga nas suas placas, para uma dada variação na tensão sobre o capacitor, quanto maior o valor da capacitância, maior será a corrente capacitiva resultante.

A equação acima indica que **para uma dada capacitância, quanto maior a taxa de variação da tensão sobre o capacitor, maior a corrente capacitiva**. Se a tensão não varia, não há corrente em seus terminais. Um aumento na frequência corresponde a um aumento na taxa de variação da tensão no capacitor e a um aumento na sua corrente. A corrente no capacitor é, portanto, diretamente proporcional à frequência (mais especificamente, à velocidade angular ω) e à capacitância do capacitor.

Pela figura 6.2.2 podemos verificar que um aumento na corrente do circuito (efeito) corresponde a uma diminuição na oposição e i_C é proporcional à frequência angular ω e à capacitância C , a oposição de um capacitor é, portanto, inversamente proporcional à frequência angular ω ($2\pi f$) e à capacitância C . Como:

$$i_C = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

Considerando $\theta_v=0^\circ$, a tensão senoidal aplicada aos terminais do capacitor é:

$$v_C(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega t)$$

diferenciando a equação:

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{d(V_p \cdot \text{sen} \omega t)}{dt} = \omega \cdot V_p \cdot \text{cos} \omega t$$

portanto:

$$i_C = C \cdot \frac{dv_C}{dt} = C \cdot \omega \cdot V_p \cdot \text{cos} \omega t$$

$$i_C = \omega \cdot C \cdot V_p \cdot \text{cos} \omega t$$

fazendo

$$I_p = \omega \cdot C \cdot V_p$$

e como $\text{cos}(\omega t) = \text{sen}(\omega t + 90^\circ)$, temos:

$$i_C(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega t + 90^\circ)$$

Podemos notar que o valor de pico da corrente i_C é diretamente proporcional à ω e à C , como previsto. Traçando o gráfico para v_C e i_C , verificamos que num capacitor a corrente está adiantada de 90° da tensão, como mostra a figura 6.2.3. Se um ângulo de fase for incluído na expressão senoidal para v_C , temos:

$$v_C(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega t \pm \theta_v)$$

então:

$$i_C(t) = \omega \cdot C \cdot V_p \cdot \text{sen}(\omega t \pm \theta_v + 90^\circ)$$

ou

$$i_C(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_i)$$

onde

$$\theta_i = \theta_v + 90^\circ$$

6.2.1. Reatância Capacitiva X_C :

A oposição estabelecida por um capacitor em um circuito alternado senoidal pode ser encontrada aplicando-se a equação:

$$\text{Efeito} = \frac{\text{Causa}}{\text{Oposição}}$$

assim,

$$\text{Oposição} = \frac{\text{Causa}}{\text{Efeito}}$$

Como a causa é a tensão aplicada e o efeito é a corrente resultante, substituindo os valores:

$$\text{Oposição} = \frac{V_{\text{ef}}}{I_{\text{ef}}} = \frac{\frac{V_p}{\sqrt{2}}}{\frac{I_p}{\sqrt{2}}} = \frac{V_p}{I_p} = \frac{V_p}{\omega \cdot C \cdot V_p} = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Assim, a oposição estabelecida por um capacitor em um circuito alternado senoidal é inversamente proporcional ao produto da frequência angular ω ($2\pi f$) pela capacitância C . O valor dessa oposição, expresso por $1/(\omega C)$, é chamado **Reatância Capacitiva** (da palavra reação) e é simbolizada pela letra X_C e cujo módulo é dado por:

$$|X_C| = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$|X_C| = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

onde:

$|X_C|$ - módulo da Reatância Capacitiva (Ω)

C - capacitância (F)

f - frequência do sinal (Hz)

ω - frequência angular (rad/s)

Como a reatância capacitiva representa uma oposição à corrente, sua unidade é o **Ohm (Ω)**.

A reatância capacitiva é a oposição ao fluxo de carga que resulta no intercâmbio contínuo de energia entre a fonte e o campo elétrico do capacitor carregando e descarregando continuamente. O capacitor não dissipa energia (ignorando os efeitos da resistência série equivalente, RSE).

A Reatância Capacitiva X_C é a medida da oposição que um capacitor oferece à variação da tensão entre seus terminais.

O valor, em módulo, da Reatância Capacitiva é **inversamente proporcional à capacitância C e à frequência f** da tensão aplicada (ou de sua frequência angular ω).

Pode-se observar que a reatância do capacitor depende da capacitância “C” e da frequência f do sinal aplicado. Sendo X_C inversamente proporcional à frequência, quanto maior a frequência, menor a Reatância Capacitiva e menor oposição à corrente. Para altas frequências, um capacitor é quase um curto circuito pois a oposição é mínima e, para baixas frequências, ou CC, um capacitor é quase um circuito aberto, pois a oposição máxima.

Conclusão:

O capacitor ideal comporta-se como um circuito aberto em corrente contínua (frequência nula) e como uma reatância elétrica (X_C) em corrente alternada, pois se opõe à variação de tensão. Para frequências muito altas, o capacitor comporta-se praticamente como um curto-circuito.

- Em CC a frequência é nula ($f = 0\text{Hz}$), então a reatância capacitiva tende a infinito ($X_C \rightarrow \infty \Omega$): o capacitor se comporta como um circuito aberto.
- Em CA quando a frequência for muito alta ($f \rightarrow \infty$), a reatância capacitiva tende a zero ($X_C \rightarrow 0\Omega$): o capacitor se comporta como um curto-circuito.

Nos capacitores a variação de tensão entre as suas placas é proporcional ao deslocamento das cargas elétricas de uma a outra placa (repulsão eletrostática) e, em suma, à quantidade de energia que se armazena. A taxa de deslocamento das cargas elétricas determina a velocidade de transferência de energia para o capacitor e, portanto, representa uma **inércia elétrica** (oposição) expressa pela **reatância capacitiva X_C** .

Exemplo 6.1.1: Determine o módulo da reatância de um capacitor de 440nF aplicado a uma tensão senoidal onde (a) $f=60\text{Hz}$ e (b) $f=10\text{kHz}$:

$$\text{a) } |X_C| = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 440 \cdot 10^{-9}} = 6028,6 \Omega$$

$$\text{b) } |X_C| = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 440 \cdot 10^{-9}} = 36,2 \Omega$$

Podemos perceber que a reatância capacitiva assume um valor de $6028,6\Omega$ para a frequência mais baixa (60Hz) e uma reatância menor ($36,2\Omega$) para a frequência maior, de 10kHz

6.2.2. Lei de Ohm para o Capacitor em Corrente Alternada

A Lei de Ohm relaciona tensão e corrente através de uma constante de proporcionalidade expressa pela oposição entre a causa (tensão aplicada) e efeito (corrente).

Portanto, a relação entre a tensão e a corrente num capacitor é dada pela sua Reatância Capacitiva. Assim, no domínio fasorial, temos:

$$X_C = \frac{\dot{V}_C}{\dot{I}_C}$$

onde:

X_C – reatância capacitiva (Ω);

\dot{V}_C - fasor tensão no capacitor (V);

\dot{I}_C - fasor corrente no capacitor (A).

Já vimos que:

$$v_C(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega t \pm \theta_v)$$

e

$$\dot{V}_C = V_{Cef} \angle \theta_v$$

assim

$$i_C(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_v + 90^\circ)$$

Na forma fasorial:

$$\dot{I}_C = I_{Cef} \angle \theta_I = I_{Cef} \angle (\theta_v + 90^\circ)$$

Considerando-se as variáveis em questão na forma de fasores (números complexos) e sabendo-se que a corrente no capacitor está adiantada de 90° da tensão, tem-se:

$$X_C = \frac{\dot{V}_C}{\dot{I}_C} = \frac{V_{Cef} \angle \theta_v}{I_{Cef} \angle (\theta_v + 90^\circ)} = \frac{V_{Cef}}{I_{Cef}} \angle [\theta_v - (\theta_v + 90^\circ)] = |X_C| \angle -90^\circ = -j \cdot |X_C|$$

Podemos observar que a reatância capacitiva é, na verdade, expressa por um **número imaginário negativo**. Então,

$$X_C = -j|X_C| = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}$$

como $-j = \frac{1}{+j}$:

$$X_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = \frac{1}{j \cdot (2\pi f) \cdot C}$$

Portanto:

A Reatância Capacitiva de um capacitor ideal é um número imaginário, pois tem fase (argumento) sempre igual a -90° (forma polar) ou somente parte imaginária negativa (forma retangular).

Assim, a **Reatância Capacitiva** e seu efeito no circuito é representada por:

$$X_C = \frac{1}{j\omega C} \quad \text{ou} \quad X_C = -j \frac{1}{\omega C} \quad \text{ou} \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$

Devido à oposição à variação da tensão, representada por X_C , o capacitor provoca **uma defasagem de 90° entre a tensão V_C e a corrente I_C** . A figura 6.2.4 mostra o diagrama fasorial para um capacitor.

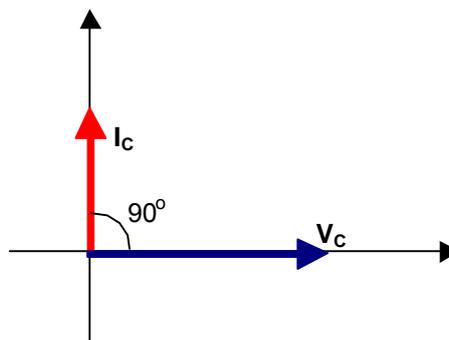


Figura 6.2.4 - Diagrama Fasorial: corrente adiantada de 90° da tensão nos terminais do capacitor.

Observação: devemos lembrar que um número imaginário é representado no eixo y, a 90° dos números reais, representados no eixo x. O operador j representa o deslocamento de 90° no plano complexo.

$$j \rightarrow 90^\circ \quad -j \rightarrow -90^\circ \quad \frac{1}{j} = -j \quad \frac{1}{-j} = j$$

Exemplo 6.2.1: Um fonte de tensão eficaz de 12V/60Hz, fase inicial nula, é aplicada aos terminais de um capacitor de $620\mu\text{F}$.

- Determine a forma trigonométrica e fasorial para a tensão aplicada ao capacitor;
- Determine o valor da reatância desse capacitor;
- Calcule o valor da corrente na forma fasorial e na forma trigonométrica;
- Trace as formas de onda de tensão e corrente nos terminais do capacitor;
- Trace o diagrama fasorial.

Para determinarmos a forma trigonométrica precisamos calcular a frequência angular:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot \pi \cdot 60 = 377 \text{ rad/s}$$

A forma trigonométrica da tensão no capacitor é, portanto:

$$v_C(t) = V_{ef} \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_V) = 12 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t + 0^\circ)$$

O fasor tensão é a tensão eficaz com o ângulo de fase inicial:

$$\dot{V}_C = 12 \angle 0^\circ$$

A reatância capacitiva é dada por:

$$X_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi f C} = \frac{1}{j2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 620 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{j0,234} = -j4,28 \Omega$$

Como,

$$X_C = \frac{\dot{V}_C}{\dot{I}_C}$$

então o fasor corrente é determinado por:

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{V}_C}{X_C} = \frac{12 \angle 0^\circ}{-j4,28} = \frac{12 \angle 0^\circ}{4,28 \angle -90^\circ} = 2,8 \angle +90^\circ \text{ A}$$

A corrente no capacitor na forma trigonométrica fica:

$$i_C(t) = 2,8 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t + 90^\circ)$$

Utilizando as formas trigonométricas para a tensão e a corrente no capacitor e atribuindo valores para a variável tempo (t) desde 0 até o valor de um período, podemos traçar um ciclo das senóides. Se atribuirmos os valores e traçarmos as formas de onda em *software* apropriado, obtemos as formas de onda da figura 6.2.5, onde podemos observar que a corrente está adiantada de 90° da tensão nos terminais do capacitor.

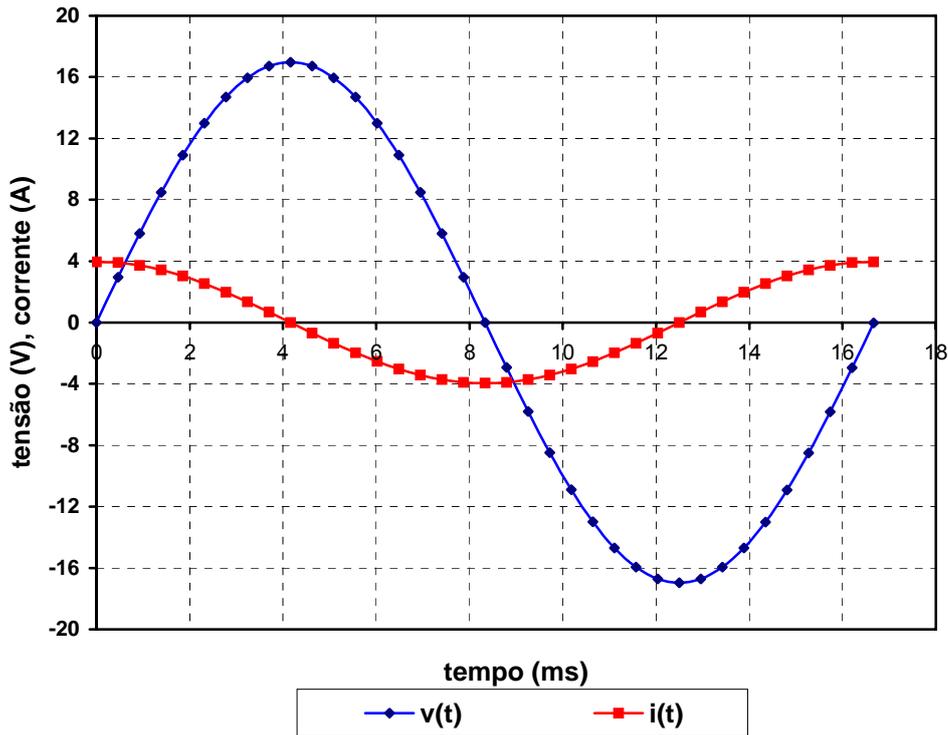


Figura 6.2.5 – Curvas de tensão e corrente no capacitor para o exemplo 6.2.1.

Tomando os fasores de tensão e corrente, podemos traçar o diagrama fasorial da figura 6.2.6.

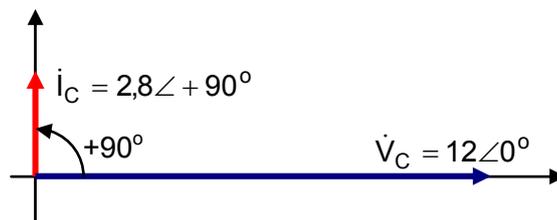


Figura 6.2.6 – Diagrama fasorial para o exemplo 6.2.1: corrente adiantada de 90° da tensão no capacitor.

6.2.3. Resposta em frequência para o Capacitor

Para o capacitor, o módulo da reatância capacitiva é dado pela equação:

$$|X_C| = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

que pode ser escrita da seguinte forma

$$|X_C| = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot C) \cdot f}$$

esta equação é uma **função inversa** e está associada com a forma de uma **hipérbole**:

$$y = f(x) = \frac{k}{x}$$

onde a variável independente x é a frequência f e a variável dependente y é o módulo da reatância capacitiva $|X_C|$, e a constante $k = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C}$.

Podemos traçar o comportamento da reatância capacitiva X_C em função da variação da frequência. Quanto maior a capacitância C , maior o decaimento da curva, ou seja menor a reatância capacitiva, como mostra a figura 6.2.7.

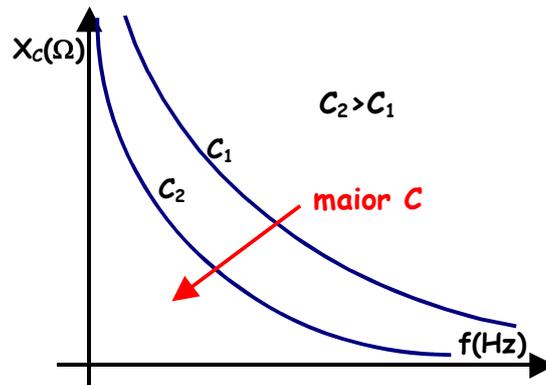


Figura 6.2.7 – comportamento da reatância capacitiva com a frequência.

6.2.4. Modelo do Capacitor Real

O modelo de um capacitor real está apresentado na figura 6.2.8, onde C é a capacitância do capacitor real, R_S (ou RSE) é a resistência série equivalente do dielétrico (geralmente maior que $10^{12}\Omega$) e R_P é a resistência paralela do encapsulamento. A indutância L_S envolve a indutância apresentada pelas placas e terminais do capacitor.

A composição dos efeitos da capacitância, da indutância e da resistência é dada pela impedância⁶ equivalente do capacitor Z_C que é função da frequência. Para frequências muito altas o efeito da indutância e da resistência se torna mais pronunciado reduzindo o efeito final da capacitância. Isto define o tipo de capacitor a ser usado em função da frequência do circuito. Por exemplo, capacitores eletrolíticos são geralmente usados em frequências até 10kHz e os cerâmicos até 10MHz.

Neste trabalho continuaremos considerando o capacitor ideal.

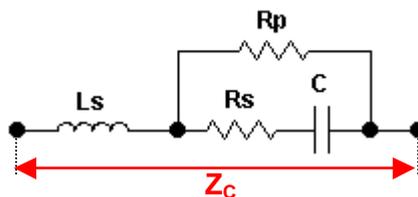


Figura 6.2.8 – modelo de um capacitor real.

6.2.5. Exercícios:

6.2.5.1) Calcular a reatância de um capacitor de $4,7\mu\text{F}$ nas frequências de 60Hz e de 400Hz.

⁶ impedância será estudada no item 6.4

- 6.2.5.2) Calcular a reatância de um capacitor de $2000\mu\text{F}$ nas frequências de 60Hz e de 5kHz .
- 6.2.5.3) Um capacitor está conectado à rede de 60Hz e apresenta uma reatância capacitiva de 200Ω . Qual a sua capacitância?
- 6.2.5.4) Em que frequências um capacitor de $33\mu\text{F}$ possuirá reatâncias de 20Ω e de $10\text{k}\Omega$?
- 6.2.5.5) Dados os circuitos da figura 6.2.6, determine:
- a reatância capacitiva de cada capacitor e a total do circuito;
 - a corrente fornecida pela fonte na forma trigonométrica e fasorial;
 - a tensão e a corrente em cada capacitor (forma fasorial e forma trigonométrica);
 - formas de onda da tensão e da corrente da fonte e em cada capacitor em função do tempo, num mesmo gráfico;
 - diagrama fasorial completo.

Dados: $v_1(t) = 220 \cdot \text{sen}(377 \cdot t + 90^\circ)$; $v_2(t) = 100 \cdot \text{sen}(1000 \cdot t + 0^\circ)$; $v_3(t) = 100 \cdot \text{sen}(1000 \cdot t - 60^\circ)$
 $C_1 = 5,6\text{nF}$; $C_2 = 10\text{nF}$

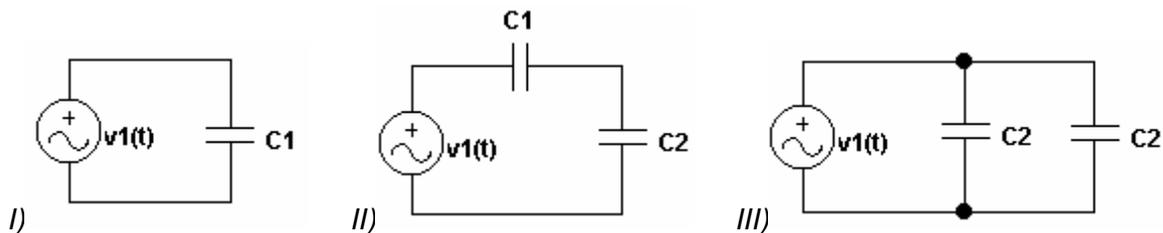


Figura 6.2.6 – circuitos para o exercício 6.2.5.5.

6.3. INDUTOR EM CORRENTE ALTERNADA

O indutor é um elemento passivo que tem a possibilidade de armazenar energia na forma de campo magnético, quando percorrido por uma corrente.

Outra característica do indutor é a de se auto-induzir. Isto é, quando a corrente que passa no indutor está variando, o fluxo magnético, provocado pela corrente, também varia e induz uma força eletromotriz (tensão) nos terminais do indutor.

A tensão induzida é expressa pela Lei de Faraday e, segundo a Lei de Lenz, se oporá à causa que a originou, portanto se oporá à variação da corrente.

$$v_L = -N \cdot \frac{d\phi}{dt}$$

onde:

v_L – tensão induzida nos terminais do indutor (V);

N – número de espiras da bobina indutora;

$d\phi/dt$ – taxa de variação do fluxo magnético no tempo (Wb/s);

A indutância L de um indutor é a medida da capacidade do indutor de armazenar energia no campo magnético através de uma auto-indução de tensão.

$$L = N \cdot \frac{d\phi}{di}$$

Assim,

$$v_L = -N \cdot \frac{d\phi}{dt} = -N \cdot \frac{L \cdot di}{dt} = -N \cdot \frac{L \cdot di}{N} \cdot \frac{1}{dt} = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

A tensão induzida no indutor depende da indutância e da variação da corrente no tempo:

$$v_L = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

A energia armazenada no indutor é dada por:

$$E_n = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \quad \text{Joules}$$

De acordo com o estudo do comportamento do transitório de carga e descarga do indutor, feito anteriormente⁷, e observando a figura 6.3.1, concluímos que:

- No indutor, a tensão auto-induzida é diretamente proporcional à variação de corrente no tempo, sendo L a constante de proporcionalidade:

$$v_L(t) = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

- Em regime permanente, um **indutor** comporta-se como um **curto-circuito em corrente contínua**, mas proporciona uma tensão nos terminais, quando em corrente variável, devido à auto-indução;
- A **corrente** nos terminais de um indutor **não** pode sofrer **variações instantâneas bruscas**, pois se ocorrer uma variação instantânea ($\Delta t \rightarrow 0$), a tensão tenderá a um valor infinito ($v_L(t) \rightarrow \infty$), o que não é possível;

$$i_L = \frac{1}{L} \cdot \int v_L \cdot dt$$

- A **tensão** no indutor **pode variar instantaneamente**, como podemos observar na figura 6.3.1.
- Só existe tensão induzida no ramo do indutor, enquanto existir variação de corrente sobre ele (pois se $\Delta I \rightarrow 0$, então $v_L(t) \rightarrow 0$).
- **Quando a tensão induzida é máxima, a corrente é nula e quando a corrente é máxima a tensão é nula.**

⁷ Este estudo é apresentado em: MUSSOI, F.L.R. **Fundamentos de Eletromagnetismo**. Florianópolis: CEFET/SC, 2005. Disponível em www.cefetsc.edu.br/mussoi

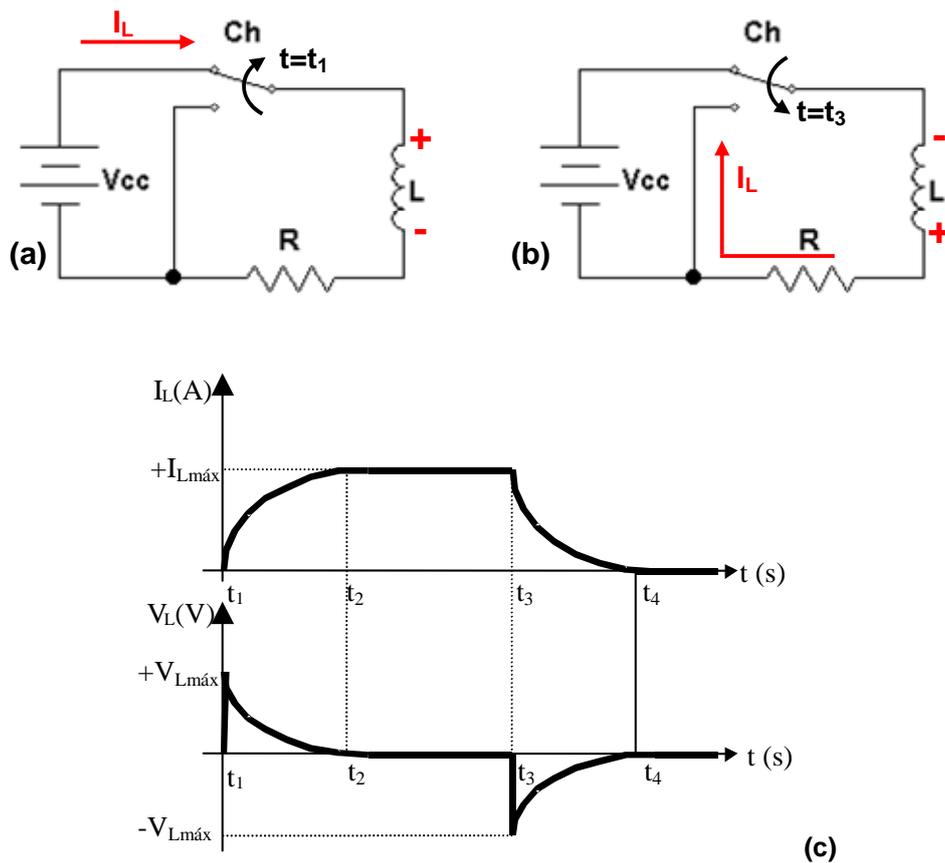


Figura 6.3.1 – Transitório CC de carga e descarga do indutor: (a) circuito para análise do carregamento; (b) circuito para descarga; (c) curva da Corrente e da Tensão no indutor em função do tempo para carga e descarga.

Consideremos o circuito da figura 6.3.2 onde um indutor está conectado a uma fonte de tensão alternada senoidal.

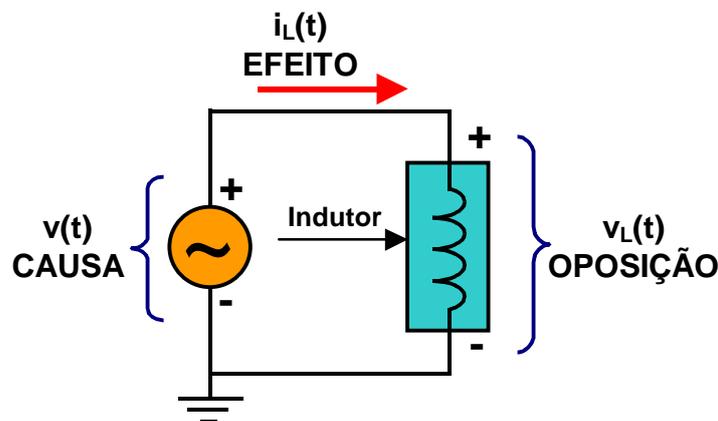


Figura 6.3.2 – indutor alimentado por uma tensão alternada senoidal.

Observando a curva da corrente alternada senoidal aplicada sobre o indutor na figura 6.3.3 vemos que os momentos de máxima variação da corrente ($\Delta I_L \rightarrow \text{máx}$) ocorrem quando seu valor está próximo de zero e, portanto, nestes instantes temos os maiores valores de tensão no indutor. Por outro lado, nos instantes em que a corrente está próxima de seu valor de pico a sua variação é muito pequena ($\Delta I_L \approx 0$) o que implica um valor de tensão baixo.

Com base nesse raciocínio, se aplicarmos uma tensão senoidal a um indutor verificaremos que, quando a tensão estiver próxima a zero, a corrente será máxima e quando a tensão for máxima a corrente será nula. A partir dessas observações podemos concluir que a tensão resultante no

indutor também é senoidal e apresenta uma defasagem de 90° com relação à corrente, como indica a figura 6.3.3.

Observando-se o gráfico da figura 6.3.3, chegamos à conclusão que:

Nos terminais de um indutor num circuito CA, a tensão sempre estará adiantada de 90° em relação à corrente.

Desta forma, a representação matemática da tensão e da corrente no capacitor, na forma trigonométrica e fasorial é a seguinte:

$$v_L(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + 0^\circ) \quad \text{ou} \quad \dot{V}_L = V_{\text{ef}} \angle 0^\circ$$

$$i_L(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - 90^\circ) \quad \text{ou} \quad \dot{I}_L = V_{\text{ef}} \angle -90^\circ$$

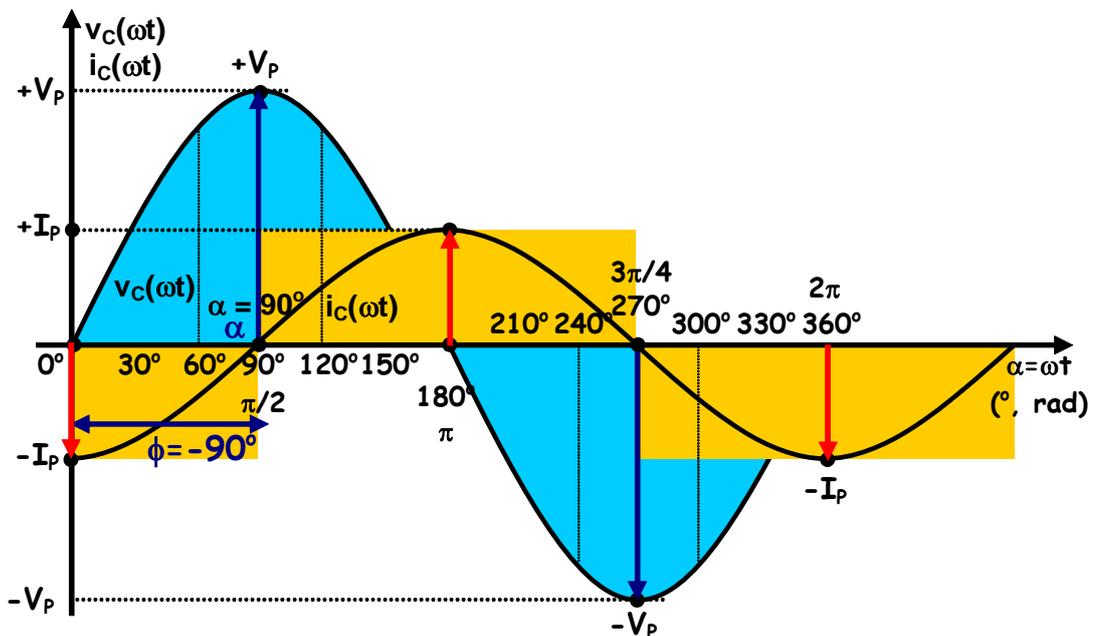


Figura 6.3.3 - Defasagem entre tensão e corrente em um indutor: corrente atrasada de 90° da tensão.

Seja o circuito da figura 6.3.2. Vamos determinar a tensão induzida no indutor para uma dada corrente no circuito. Para circuitos indutivos, a corrente nos terminais do indutor é limitada pela taxa na qual o fluxo magnético varia. Em outras palavras, uma variação instantânea na corrente sobre o indutor é impedida pelo fato que há uma indução de tensão que se opõe à variação da corrente (Leis de Faraday e de Lenz).

Como indutância é uma medida da taxa com que um indutor armazena energia no campo magnético, para uma dada variação na corrente sobre o indutor, quanto maior o valor da indutância, maior será a tensão induzida nos terminais do indutor. A equação

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$$

indica que para uma dada indutância, quanto maior a taxa de variação da corrente através do indutor, maior será a tensão induzida nos seus terminais. Um aumento na frequência corresponde a um aumento na taxa de variação da corrente e a um aumento na tensão nos terminais do indutor. A tensão no indutor é, portanto, diretamente proporcional à frequência (mais especificamente, à velocidade angular ω) e à indutância do indutor.

Pela figura 6.3.2 podemos verificar que um aumento na corrente do circuito deve corresponder a uma diminuição na oposição. A tensão no indutor v_L é diretamente proporcional à velocidade angular ω e à indutância L , pois:

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Diferenciando a equação $i_L(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega t)$ e considerando o ângulo de fase inicial da corrente nulo ($\theta_i = 0^\circ$), temos:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{d(I_p \cdot \text{sen} \omega t)}{dt} = \omega \cdot I_p \cdot \text{cos} \omega t$$

substituindo na equação da tensão induzida no indutor,

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot (\omega \cdot I_p \cdot \text{cos} \omega t) = \omega \cdot L \cdot I_p \cdot \text{cos} \omega t$$

então

$$v_L(t) = \omega \cdot L \cdot I_p \cdot \text{cos}(\omega t)$$

ou

$$v_L(t) = \omega \cdot L \cdot I_p \cdot \text{sen}(\omega t + 90^\circ)$$

fazendo

$$V_p = \omega \cdot L \cdot I$$

assim

$$v_L(t) = V_p \cdot \text{cos}(\omega t)$$

ou

$$v_L(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega t + 90^\circ)$$

Notamos que o valor de pico está diretamente associado a ω e L . Traçando as curvas de $i_L(t)$ e $v_L(t)$ verificamos que **num indutor a corrente está atrasada de 90° da tensão**, como mostra a figura 6.3.3.

Se um ângulo de fase for incluído na expressão senoidal de i_L , temos:

$$i_L(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega t \pm \theta_i)$$

$$v_L(t) = \omega \cdot L \cdot I_p \cdot \text{sen}(\omega t \pm \theta_i + 90^\circ)$$

$$v_L(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega t \pm \theta_i + 90^\circ)$$

$$\theta_v = \theta_i + 90^\circ \quad \text{ou} \quad \theta_i = \theta_v - 90^\circ$$

6.3.1. Reatância Indutiva X_L :

Como visto na figura 6.3.1, quando aplicada uma tensão a uma bobina, a corrente levará um certo tempo para atingir o seu valor de regime permanente. Assim, existe uma defasagem entre a tensão aplicada e a corrente que percorre o indutor.

Um indutor oferece uma oposição à variação de corrente devido à auto-indução de tensão. A oposição estabelecida por um indutor em um circuito AC senoidal pode ser encontrada aplicando a equação:

$$\text{Efeito} = \frac{\text{Causa}}{\text{Oposição}}$$

ou

$$\text{Oposição} = \frac{\text{Causa}}{\text{Efeito}}$$

substituindo os valores, temos:

$$\text{Oposição} = \frac{V_{\text{Lef}}}{I_{\text{Lef}}} = \frac{\frac{V_p}{\sqrt{2}}}{\frac{I_p}{\sqrt{2}}} = \frac{V_p}{I_p} = \frac{\omega \cdot L \cdot I_p}{I_p} = \omega \cdot L$$

Assim, a oposição estabelecida por um indutor em um circuito alternado senoidal está diretamente relacionada ao produto da velocidade angular ω ($2\pi f$) pela indutância L .

O produto ωL é chamado **Reatância Indutiva** (da palavra reação) e é simbolizada pela letra X_L . O valor, em módulo, da Reatância Indutiva é **diretamente proporcional à indutância L e à frequência f** da tensão aplicada (ou de sua frequência angular ω), sendo expresso por:

$$|X_L| = \omega \cdot L$$

$$|X_L| = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$$

Onde:

$|X_L|$ - módulo da Reatância Indutiva (Ω)

L - indutância (H)

f - frequência do sinal (Hz)

ω - frequência angular (rad/s)

Como a reatância indutiva representa uma oposição à corrente, sua unidade é o Ohm (Ω).

A Reatância Indutiva X_L é a medida da oposição que um indutor oferece à variação da corrente em seus terminais.

A reatância indutiva (X_L) depende da indutância L do indutor e da frequência f do sinal aplicado. Quanto maior a frequência, maior o valor de X_L , portanto, maior sua ação limitadora à variação da corrente. **Para frequências muito baixas, uma reatância indutiva é quase zero, o que significa que um indutor em corrente contínua constante é um curto circuito.**

No outro extremo, para frequências muito altas, X_L assume valores muito altos, o que significa que um indutor se comporta como um circuito aberto.

A reatância indutiva é a oposição à variação do fluxo de corrente, que resulta numa troca contínua de energia entre a fonte e o campo magnético do indutor. Ao contrário do resistor que dissipa energia na forma de calor, a reatância indutiva não dissipa energia (desde que os efeitos da resistência dos fios da bobina sejam ignorados).

Conclusão:

O indutor ideal comporta-se como um **curto-circuito em corrente contínua** e como uma reatância elétrica em corrente alternada - X_L (se opõe à variação de corrente). Para **frequências muito altas**, o indutor comporta-se praticamente como um **circuito aberto**.

- Em corrente contínua constante a frequência é nula ($f = 0\text{Hz}$) e a reatância indutiva também é nula ($X_L = 0\Omega$) e o indutor se comporta como um curto-circuito.
- Em corrente alternada, quando a frequência tende a um valor muito alto ($f \rightarrow \infty$), a reatância indutiva também aumenta muito ($X_L \rightarrow \infty\Omega$) e o indutor se comporta como um circuito aberto.

Reatância Indutiva é, portanto, a inércia elétrica, ou seja, a oposição à variação de energia armazenada sobre sobre indutores, como resultado da variação de campo magnético em seu núcleo.

Exemplo 6.3.1: Determine o módulo da reatância de um indutor de $330\mu\text{F}$ aplicado a uma tensão senoidal onde (a) $f=60\text{Hz}$ e (b) $f=10\text{kHz}$:

$$\text{a) } |X_L| = \omega L = 2\pi fL = 2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 3,3 \cdot 10^{-3} = 1,24 \Omega$$

$$\text{b) } |X_L| = \omega L = 2\pi fL = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 3,3 \cdot 10^{-3} = 207,3 \Omega$$

Podemos perceber que a reatância indutiva assume um valor de $1,24\Omega$ para a frequência mais baixa (60Hz) e uma reatância maior ($207,3\Omega$) para a frequência maior, de 10kHz.

6.3.2. Lei de Ohm para o Indutor em corrente alternada

A Lei de Ohm relaciona tensão e corrente através de uma constante de proporcionalidade expressa pela oposição entre a causa (tensão) e o efeito (corrente).

A relação entre a tensão e a corrente num indutor é dada pela sua Reatância Indutiva. Assim, no domínio fasorial:

$$X_L = \frac{\dot{V}_L}{\dot{I}_L}$$

onde:

X_L – reatância indutiva (Ω);

\dot{V}_L - fasor tensão no indutor (V);

\dot{I}_L - fasor corrente no indutor (A).

Já vimos que:

$$i_L(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega t \pm \theta_1)$$

Nos terminais do indutor a tensão será:

$$v_L(t) = \omega \cdot L \cdot I_p \cdot \text{sen}(\omega t \pm \theta_1 + 90^\circ)$$

na forma fasorial:

$$\dot{i}_L = \frac{I_p}{\sqrt{2}} \angle \theta_1 = I_{\text{Lef}} \angle \theta_1$$

$$\dot{v}_L = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \angle (\theta_1 + 90^\circ) = V_{\text{Lef}} \angle (\theta_1 + 90^\circ)$$

Considerando-se, então, as variáveis em questão na forma de fasores (números complexos) e a corrente atrasada de 90° da tensão, temos:

$$X_L = \frac{\dot{V}_L}{\dot{I}_L} = \frac{V_{\text{Lef}} \angle (\theta_1 + 90^\circ)}{I_{\text{Lef}} \angle \theta_1} = \frac{V_{\text{ef}}}{I_{\text{ef}}} \angle [\theta_1 + 90^\circ - \theta_1] = |X_L| \angle +90^\circ = +j \cdot |X_L|$$

$$X_L = j|X_L| = j \cdot \omega \cdot L = \omega \cdot L \angle 90^\circ$$

Assim, o **Módulo da Reatância Indutiva** é representada por:

$$|X_L| = \omega \cdot L \quad \text{ou} \quad |X_L| = (2 \cdot \pi \cdot f) \cdot L$$

Portanto, a **Reatância Indutiva** de um **indutor ideal** é um **número imaginário positivo** pois tem **fase** sempre igual a **+90°** (forma polar) ou tem **somente parte imaginária positiva** (forma retangular).

Para representar matematicamente esta defasagem incluímos o operador de número imaginário “+j” na relação entre a tensão e a corrente no indutor.

Devido à oposição à variação da corrente, representada por X_L , o indutor provoca uma **defasagem de 90° entre a tensão V_L e a corrente I_L** , como mostra o diagrama fasorial da figura 6.3.4.

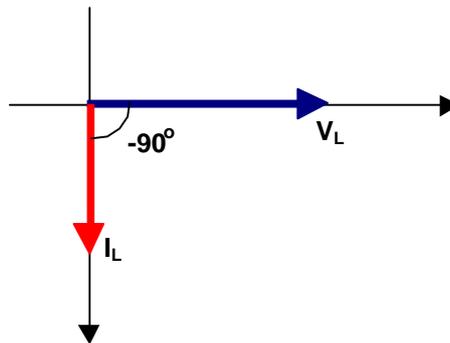


Figura 6.3.4 - Diagrama Fasorial: corrente atrasada de 90° da tensão nos terminais do indutor.

Exemplo 6.3.2: Um fonte de tensão eficaz de 12V/60Hz, fase inicial nula, é aplicada aos terminais de um indutor de 15mF.

- Determine a forma trigonométrica e fasorial para a tensão aplicada ao indutor;
- Determine o valor da reatância desse indutor;
- Calcule o valor da corrente na forma fasorial e na forma trigonométrica;
- Trace as formas de onda de tensão e corrente nos terminais do indutor;
- Trace o diagrama fasorial.

Para determinarmos a forma trigonométrica precisamos calcular a freqüência angular:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot \pi \cdot 60 = 377 \text{ rad/s}$$

A forma trigonométrica da tensão no indutor é, portanto:

$$v_L(t) = V_{ef} \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_V) = 12 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t + 0^\circ)$$

O fasor tensão é a tensão eficaz com o ângulo de fase inicial:

$$\dot{V}_L = 12 \angle 0^\circ$$

A reatância indutiva é dada por:

$$X_L = j\omega L = j2\pi fL = j2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 15 \cdot 10^{-3} = 5,65 \Omega$$

Como,

$$X_L = \frac{\dot{V}_L}{\dot{I}_L}$$

então o fasor corrente é determinado por:

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{V}_L}{X_L} = \frac{12 \angle 0^\circ}{j5,65} = \frac{12 \angle 0^\circ}{5,65 \angle +90} = 2,12 \angle -90^\circ \text{ A}$$

A corrente no indutor na forma trigonométrica fica:

$$i_L(t) = 2,12 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t - 90^\circ)$$

Utilizando as formas trigonométricas para a tensão e a corrente no indutor e atribuindo valores para a variável tempo (t) desde 0 até o valor de um período T , podemos traçar um ciclo das senóides. Se atribuirmos os valores e traçarmos as formas de onda em *software* apropriado, obtemos as formas de onda da figura 6.3.5, onde podemos observar que a corrente está atrasada de 90° da tensão nos terminais do indutor.

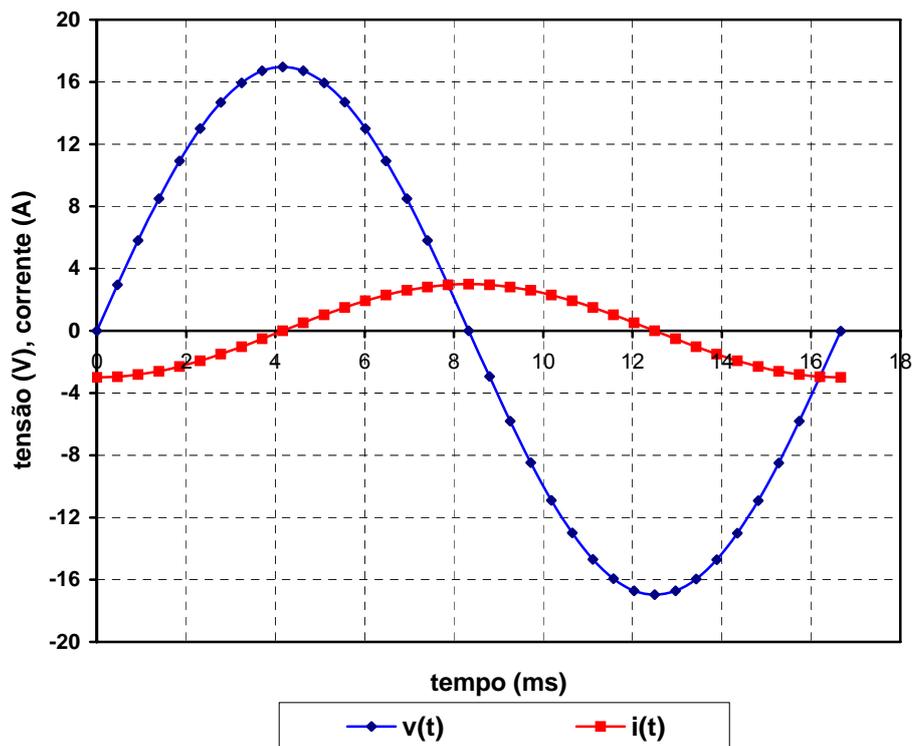


Figura 6.3.5 – Curvas de tensão e corrente no indutor para o exemplo 6.3.2.

Tomando os fasores de tensão e corrente, podemos traçar o diagrama fasorial da figura 6.3.6.

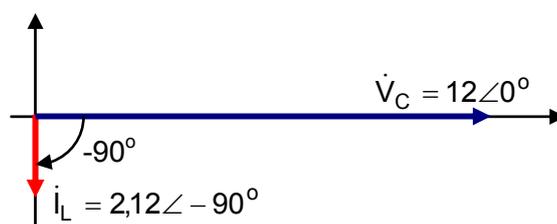


Figura 6.3.6 – Diagrama fasorial para o exemplo 6.3.2: corrente atrasada de 90° da tensão no indutor.

6.3.3. Resposta em frequência para o Indutor

A equação

$$X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$$

está associada com a equação de uma reta:

$$y = f(x) = a \cdot x + b$$

Assim, sendo a frequência f a variável independente, temos:

$$y = (2 \cdot \pi \cdot L) \cdot f + 0$$

O coeficiente de inclinação (coeficiente angular) a é:

$$a = 2 \cdot \pi \cdot L$$

e sendo $b = 0$, a reta representada pela equação passa pela origem.

Podemos traçar o comportamento da reatância indutiva em função da frequência, como mostra a figura 6.3.7. Quanto maior a indutância L , maior a inclinação para uma mesma faixa de frequências, como mostra a figura 6.3.7.

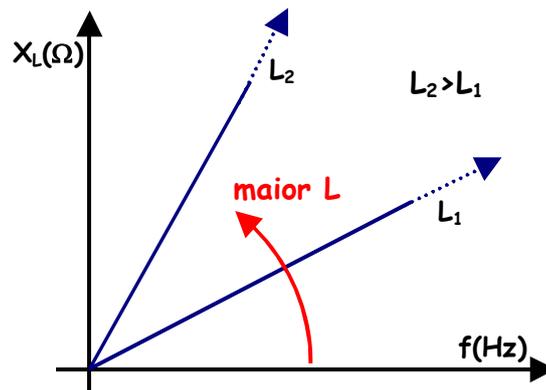


Figura 6.3.7 – comportamento da reatância indutiva com a frequência.

6.3.4. Modelo do Indutor Real

O modelo de um indutor real está apresentado na figura 6.3.8, onde L é a indutância do indutor real, R_s é a resistência série que representa as perdas nos condutores da bobina e no núcleo (correntes parasitas e Foucault). A capacitância C_p é a capacitância parasita existente entre as espiras da bobina. A composição dos efeitos da indutância, da resistência e da capacitância é dada pela impedância⁸ equivalente do indutor real Z_L , que é função da frequência. Para frequências altas o efeito da capacitância e da resistência série será mais pronunciado, reduzindo o efeito da indutância e podendo até o indutor real ter um comportamento mais capacitivo que indutivo em frequências muito altas.

Neste trabalho consideramos o indutor ideal.

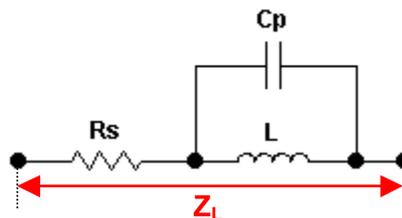


Figura 6.3.8 – modelo de um indutor real.

⁸ impedância será estudada no item 6.4.

6.3.3. Exercícios:

- 6.3.3.1) Calcular a reatância indutiva de um indutor de 200mH em freqüências de 60Hz e 500Hz.
- 6.3.3.2) Em que freqüência está conectado um indutor de 100mH que tem reatância indutiva de 150Ω ?
- 6.3.3.3) Dados os circuitos da figura 6.3.7, determine:
- a reatância indutiva de cada indutor e a total do circuito;
 - a corrente fornecida pela fonte na forma trigonométrica e fasorial;
 - a tensão e a corrente em cada indutor (forma fasorial e forma trigonométrica);
 - formas de onda da tensão e da corrente da fonte e em cada indutor em função do tempo, num mesmo gráfico;
 - diagrama fasorial completo.

Dados: $v_1(t) = 220.\text{sen}(377.t+90^\circ)$; $v_2(t) = 100.\text{sen}(1000.t+0^\circ)$; $v_3(t) = 100.\text{sen}(1000.t-60^\circ)$
 $L_1=200\text{mH}$; $L_2=30\text{mH}$; $L_3=20\text{mH}$

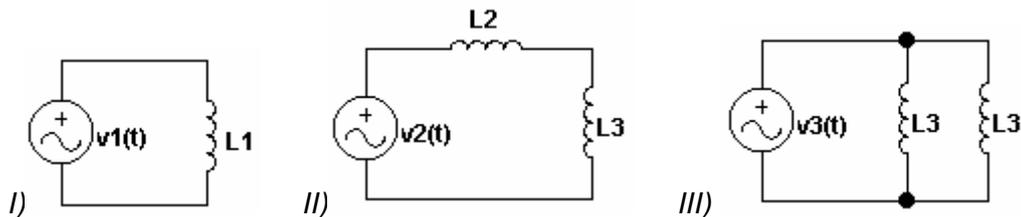


Figura 6.3.9 – circuitos para o exemplo 6.3.3.3.

6.4. IMPEDÂNCIA

Em um circuito real a resistência elétrica, que é propriedade física dos materiais que o constituem, está sempre presente. Ela pode ser minimizada, mas não eliminada. Portanto, circuitos indutivos e capacitivos são, na verdade, redes do tipo RL e RC, cujas associações série, paralela ou mista, dependem da configuração dos circuitos e do processo de fabricação dos componentes do circuito. A combinação dos efeitos resistivos e reativos dá origem à **Impedância** dos circuitos.

Para um circuito de dois terminais A e B, representado por um bloco de carga alimentado por um fasor de tensão de entrada \dot{V} e um fasor de corrente de entrada \dot{I} , contendo qualquer elemento passivo (capacitor, indutor ou resistor) ou a combinação deles como mostra a figura 6.4.1. A relação entre a tensão e a corrente é dada pela **Impedância (Z)** do circuito.

Impedância (Z) de um circuito é definida como a relação entre a tensão e a corrente que atravessa um bipolo de um circuito.

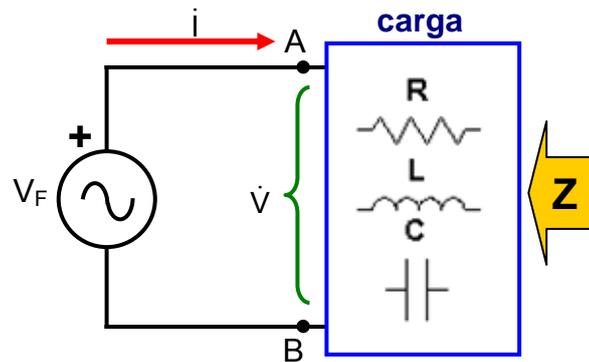


Figura 6.4.1 – Fonte de Tensão alternada alimentando um circuito RLC

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{i}}$$

onde:

\dot{V} – fasor tensão entre os terminais A e B (V);

\dot{i} – fasor corrente entre os terminais A e B (A);

Z – Impedância do bloco de carga entre os terminais A e B (Ω).

A impedância Z, dada pela relação entre tensão e corrente num circuito misto, representa a medida da oposição que este circuito oferece à passagem de uma corrente alternada.

Como os fasores \dot{V} e \dot{i} são números complexos, a **impedância Z é também um número complexo, mas não é um fasor.**

- **Para um circuito (ou bloco) resistivo puro:**

Se o bloco de carga do circuito da figura 6.4.1 for composto apenas por um ou uma combinação de **resistores ideais** (circuito resistivo puro) e sabendo que a tensão e a corrente estão em fase num elemento resistivo, então:

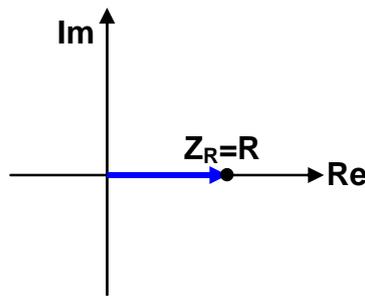
$$Z_R = \frac{\dot{V}_R}{\dot{i}_R} = \frac{V_{ef} \angle 0^\circ}{I_{ef} \angle 0^\circ} = \frac{V_{ef}}{I_{ef}} \angle 0^\circ = R \angle 0^\circ = R$$

Nos terminais de um resistor ou de um circuito resistivo puro a impedância Z é igual à resistência R:

$$Z_R = R$$

É, portanto, um **número real positivo.**

No plano cartesiano a representação de uma impedância de um resistor ideal é dada na figura 6.4.2.



6.4.2 – Impedância de um resistor ideal: número real no plano cartesiano.

- **Para um circuito (ou bloco) indutivo puro:**

Se o bloco de carga do circuito da figura 6.4.1 for composto apenas por um ou uma combinação de **indutores ideais** (circuito indutivo puro) e sabendo que a corrente está atrasada de 90° da tensão num elemento indutivo puro, então:

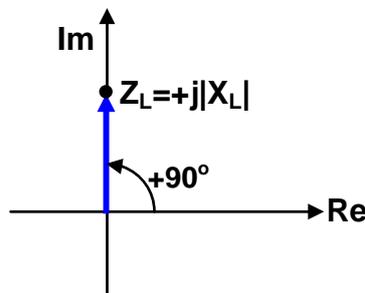
$$Z_L = \frac{\dot{V}_L}{\dot{I}_L} = \frac{V_{ef} \angle 0^\circ}{I_{ef} \angle -90^\circ} = \frac{V_{ef}}{I_{ef}} \angle +90^\circ = |X_L| \angle +90^\circ = +j \cdot |X_L| = +j \cdot \omega \cdot L$$

Num circuito ou bloco indutivo puro a impedância Z é igual à reatância indutiva X_L :

$$Z_L = +j \cdot |X_L| = +j \cdot \omega \cdot L$$

É, portanto, um **número imaginário positivo**.

No plano cartesiano a representação de uma impedância de um indutor ideal é dada na figura 6.4.3.



6.4.3 – Impedância de um indutor ideal: número imaginário positivo no plano cartesiano.

- **Para um circuito (ou bloco) capacitivo puro:**

Se o bloco de carga do circuito da figura 6.4.1 for composto apenas por um ou uma combinação de **capacitores ideais** (circuito capacitivo puro) e sabendo que a corrente está adiantada de 90° da tensão num elemento capacitivo puro, então:

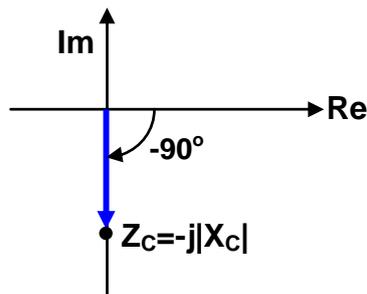
$$Z_C = \frac{\dot{V}_C}{\dot{I}_C} = \frac{V_{ef} \angle 0^\circ}{I_{ef} \angle +90^\circ} = \frac{V_{ef}}{I_{ef}} \angle -90^\circ = |X_C| \angle -90^\circ = -j \cdot |X_C| = \frac{|X_C|}{j} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

Nos terminais de um indutor ou num circuito capacitivo puro, a impedância Z é igual à reatância capacitiva X_C :

$$Z_C = -j \cdot |X_C| = \frac{-j}{\omega \cdot C} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

É, portanto, um **número imaginário negativo**.

No plano cartesiano a representação de uma impedância de um capacitor ideal é dada na figura 6.4.4.



6.4.4 – Impedância de um capacitor ideal: número imaginário negativo no plano cartesiano.

- **Para circuito (ou bloco) RLC misto:**

Se o bloco de carga do circuito da figura 6.4.1 for composto pela combinação de elementos passivos (circuito misto), a tensão e a corrente terão ângulos de fase diferentes e estarão defasados por um ângulo ϕ .

Sabendo que:

$$\phi = \theta_v - \theta_i$$

então:

$$Z = \frac{\dot{V}_Z}{\dot{I}_Z} = \frac{V_{ef} \angle \theta_v}{I_{ef} \angle \theta_i} = \frac{V_{ef}}{I_{ef}} \angle (\theta_v - \theta_i) = |Z| \angle (\theta_v - \theta_i) = |Z| \angle \pm \phi = R \pm j \cdot X$$

Como sabemos, um número é chamado **complexo** porque é **composto** por **duas partes**: uma parte real e uma parte imaginária. Portanto:

A impedância de um elemento de carga misto é um número complexo.

Na forma polar possui um módulo $|Z|$ e um ângulo ϕ . Na forma retangular possui uma parte real, representada pela resistência R da carga do circuito e uma parte imaginária, representada pela reatância X da carga do circuito:

$$Z = |Z| \angle \pm \phi = R \pm j \cdot X$$

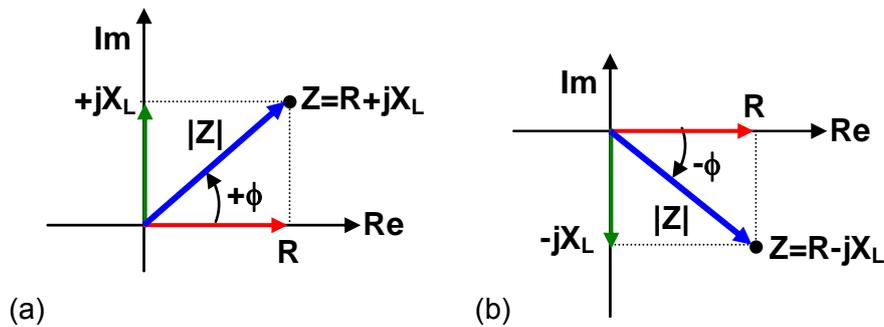
Nos terminais de uma carga mista (RLC), a impedância Z será composta por uma **parte real positiva** referente ao **teor resistivo** e uma parte imaginária referente ao teor reativo (capacitivo ou indutivo).

- Se a **parte imaginária** for **positiva**, o **teor** é **indutivo**.
- Se a **parte imaginária** for **negativa**, o **teor** é **capacitivo**.

O ângulo ϕ representa a diferença entre as fases da tensão e da corrente e é chamado **ângulo de defasagem**, **ângulo de deslocamento** ou **ângulo de impedância**:

$$\phi = \theta_v - \theta_i$$

A impedância de um circuito de carga mista pode ser representado no plano cartesiano como um número complexo, como mostra a figura 6.4.5.



6.4.5 – Impedância de um circuito de carga mista é um número complexo no plano cartesiano: (a) teor indutivo, parte imaginária positiva; (b) teor capacitivo, parte imaginária negativa.

Como estudado na matemática, podemos representar um número complexo na forma polar e na forma retangular e ainda transformarmos de uma forma em outra. Assim, podemos representar a Impedância na forma polar ou na forma retangular e transformá-las uma em outra, como mostra a figura 6.4.6:

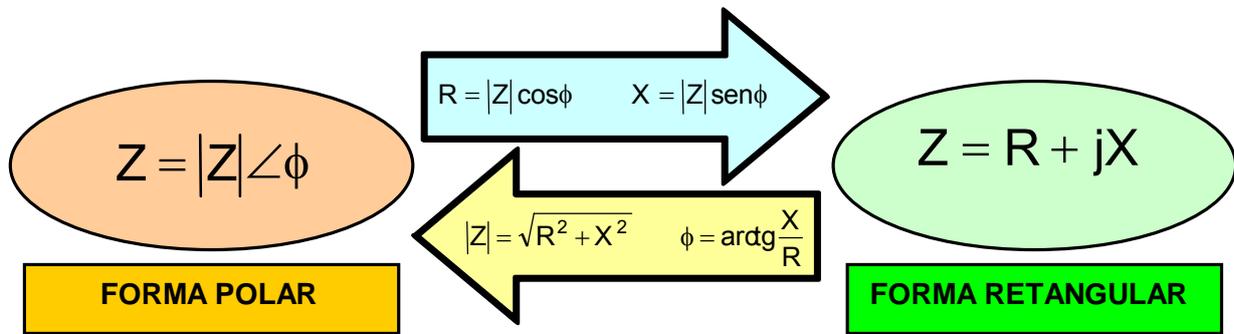


Figura 6.4.6 – transformação de impedâncias da forma polar para a forma retangular e vice-versa.

Observação: A maioria das calculadoras científicas apresenta uma função que permite essas transformações facilmente. É importante conhecer como fazê-las, para facilitar os cálculos necessários a uma análise de um circuito em corrente alternada.

No trato dos circuitos no domínio fasorial, todos os elementos do circuito ser substituídos por uma única **impedância equivalente** Z_{eq} , que em geral é representada na forma retangular:

$$Z_{eq} = |Z_{eq}| \angle \pm \phi = R \pm j \cdot X$$

Nesta representação, R , a parte real, é a resistência total do circuito e X , a parte imaginária, é a reatância total do circuito que depende das reatâncias indutivas e capacitivas existentes.

Como se pode notar de $Z = \frac{\dot{V}}{I}$, o ângulo da impedância é o ângulo através do qual a corrente de entrada avança com relação à tensão aplicada, contanto que este ângulo seja positivo. Se for negativo, então a corrente avança com relação à tensão.

Um circuito com um **ângulo de impedância positivo** é chamado **circuito de teor indutivo**, porque as reatâncias indutivas dominam as reatâncias capacitivas. Similarmente, um circuito que tem um **ângulo de impedância negativo** é chamado de **circuito de teor capacitivo**, pois as reatâncias dos capacitores dominam sobre as reatâncias indutivas.

Se o ângulo ϕ for nulo na forma polar, a parte imaginária será nula na forma retangular. Isso significa que o circuito possui teor resistivo.

6.4.1. Diagrama de Impedâncias e Triângulo de Impedâncias

Um diagrama de impedância é um auxiliar gráfico para se entender a impedância. Este diagrama é construído sobre um plano cartesiano de impedâncias (ou plano complexo) que, como ilustra a figura 6.4.7(a), tem um eixo horizontal (dos números reais) que representa as resistências, designado por R , e um eixo vertical (dos números imaginários) que representa as reatâncias, designado por jX . Os dois eixos devem ter a mesma escala.

Um circuito com teor indutivo apresenta um diagrama de impedância no primeiro quadrante ($X_L +$) e um circuito com teor capacitivo apresenta o diagrama de impedância no quarto quadrante ($X_C -$).

Observação: Para um diagrama estar ou no segundo ou no terceiro quadrante, um circuito deveria ter uma resistência negativa. Isso só poderia ser produzido por uma ou mais **fontes dependentes** no circuito. Este caso não será objeto de nosso estudo neste trabalho.

O **Triângulo de Impedância** é geralmente uma representação gráfica mais conveniente. O triângulo retângulo contém vetores que correspondem à resistência R , à reatância jX e à impedância Z , com o vetor jX , traçado na ponta do vetor R e o vetor para Z traçado como a soma destes dois vetores, como mostra a figura 6.4.7(b) e (c). Podemos perceber que **a impedância é a soma vetorial da resistência com a reatância**.

Assim, no Triângulo de Impedância:

- o cateto adjacente é a resistência;
- o cateto oposto é o módulo da reatância;
- a hipotenusa é o módulo da impedância;
- o ângulo é o argumento da impedância que corresponde à defasagem (deslocamento) da corrente com relação à tensão no circuito.

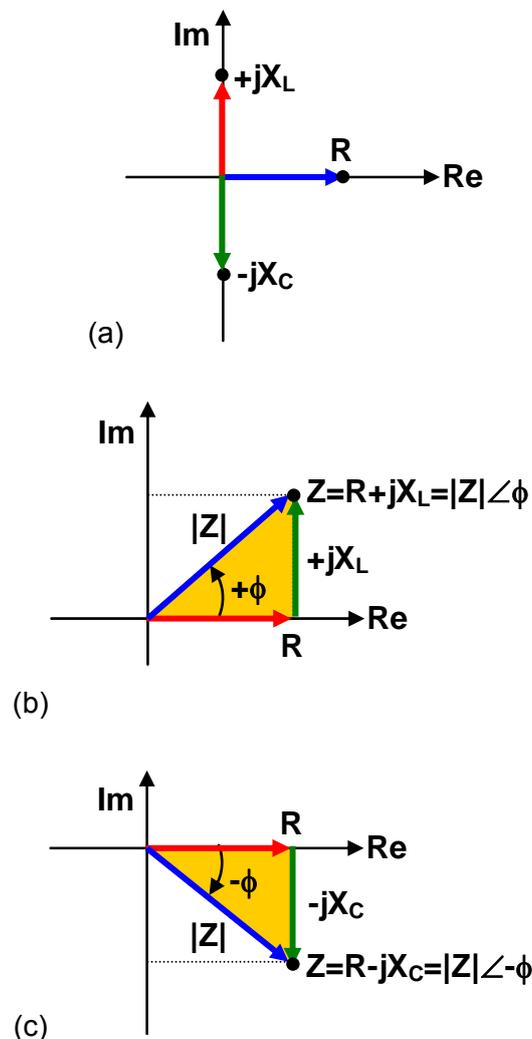


Figura 6.4.7 – Diagrama de Impedâncias e Triângulo de Impedâncias: (a) cargas puras R, L ou C não formam o triângulo de impedâncias; (b) cargas RL formam um triângulo de impedância positivo; (c) cargas RC formam um triângulo de impedância negativo.

Sabemos que a relação entre a tensão e a corrente num elemento ou parte de um circuito é a impedância. Esta, por sua vez, é um número complexo:

$$Z = \frac{\dot{V}_Z}{\dot{I}_Z} = \frac{V_{ef} \angle \theta_v}{I_{ef} \angle \theta_i} = \frac{V_{ef}}{I_{ef}} \angle (\theta_v - \theta_i) = |Z| \angle (\theta_v - \theta_i) = |Z| \angle \pm \phi = R \pm j \cdot X$$

Através da análise do triângulo de impedância podemos aplicar as relações trigonométricas para obter o cateto adjacente (resistência) e o cateto oposto (módulo da reatância). Assim:

$$R = |Z| \cdot \cos \phi$$

$$X = |Z| \cdot \text{sen } \phi$$

Se tivermos disponíveis os valores da resistência e da reatância, podemos aplicar as relações trigonométricas do triângulo de impedâncias e obter a hipotenusa (módulo da impedância) e o ângulo (argumento da impedância). Assim:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + |X|^2}$$

$$\phi = \pm \arctg \left(\frac{|X|}{R} \right)$$

Exemplo 6.4.1: Em uma carga de um circuito de corrente alternada, uma tensão $v(t) = 12 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t + 15^\circ)$ provoca uma corrente $i(t) = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t - 45^\circ)$.

- Determine a impedância dessa carga
- Determine a defasagem entre tensão e corrente e o teor do circuito;
- Trace o triângulo de impedância da carga;
- Trace as formas de onda da tensão e da corrente na carga.

Sabemos que a impedância de uma carga é dada pela relação entre o fasor tensão e o fasor corrente nessa carga:

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}}$$

Assim, a partir dos sinais de tensão e corrente fornecidos na forma trigonométrica podemos obter os fasores:

$$\dot{V} = 12 \angle 15^\circ \quad \text{e} \quad \dot{I} = 3 \angle -45^\circ$$

A impedância será:

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{12 \angle 15^\circ}{3 \angle -45^\circ} = \frac{12}{3} \angle [15 - (-45)] = 4 \angle 60^\circ$$

Na forma retangular, a impedância é:

$$Z = 2 + j3,46 \, \Omega$$

Podemos concluir que o teor do circuito é **indutivo**, pois a parte imaginária é positiva. A defasagem pode ser obtida diretamente do ângulo da impedância, ou fazendo-se:

$$\phi = \theta_V - \theta_I = 15^\circ - (-45^\circ) = +60^\circ$$

O triângulo de impedância fica como apresentado na figura 6.4.8.

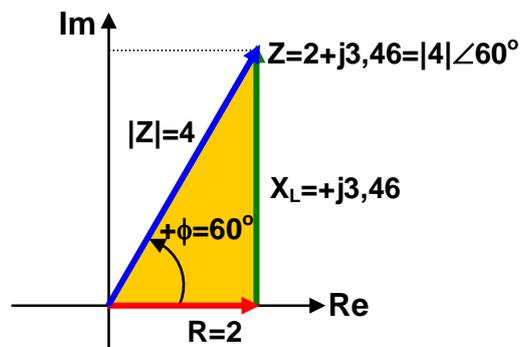


Figura 6.4.8 – Triângulo de impedância para o exemplo 6.4.1.

Para traçarmos as formas de onda, devemos atribuir valores para a variável tempo t , desde zero até o valor de um período T , às equações trigonométricas de tensão e corrente. Utilizando um *software* para traçar as formas de onda obtemos as curvas da figura 6.4.9. Podemos notar o defasamento de 60° entre a tensão e a corrente. Como o circuito é indutivo a corrente está atrasada.

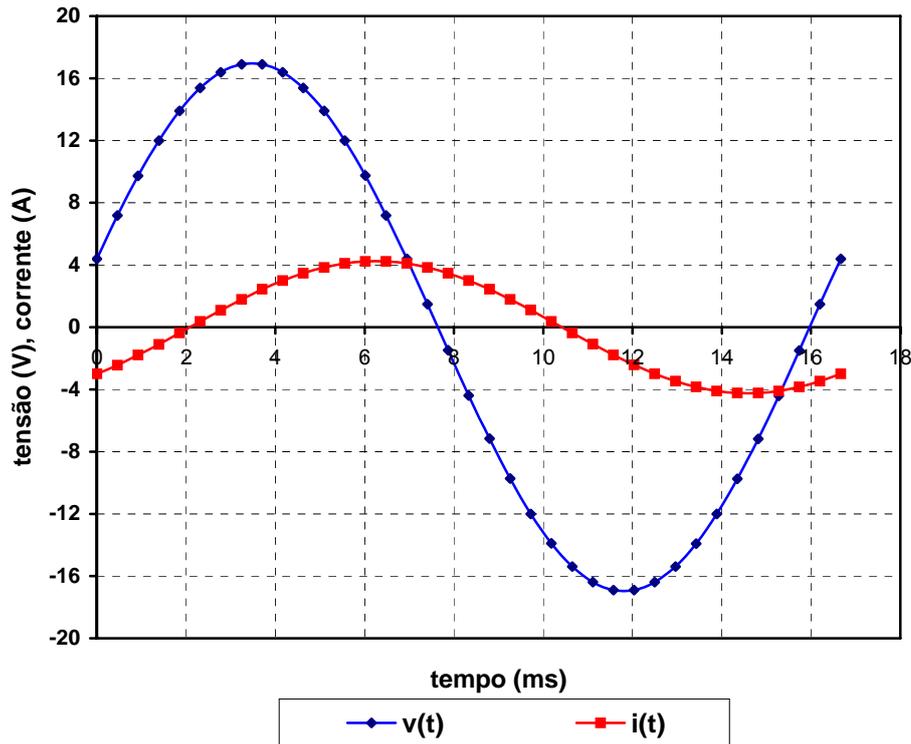


Figura 6.4.9 – Formas de onda de tensão e corrente para o exemplo 6.4.1.

6.4.2. Associação de Impedâncias:

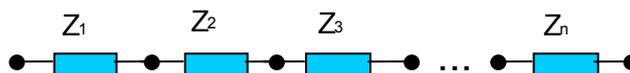
Como uma Impedância é a medida da oposição de um circuito à passagem da corrente alternada, as impedâncias se relacionam com os fasores de corrente e de tensão através da Lei de Ohm, da mesma maneira que as resistências se relacionam com as correntes e tensões em CC. Portanto,

As impedâncias podem ser associadas da mesma forma que as resistências.

6.4.2.1. Associação Série de Impedâncias:

A impedância equivalente Z_{eq} de uma associação de n impedâncias em série, como mostra a figura 6.4.10 dada pela soma das impedâncias individuais da associação:

$$Z_{eq} = \sum_{i=1}^n Z_i$$



$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n$$

Figura 6.4.10 associação série de impedâncias.

6.4.2.2. Associação Paralela de Impedâncias:

O **inverso** da impedância equivalente Z_{eq} de uma associação de n impedâncias em paralelo, como mostra a figura 6.4.11 é dada **pela soma dos inversos** das n impedâncias da associação:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{Z_i} \right)$$

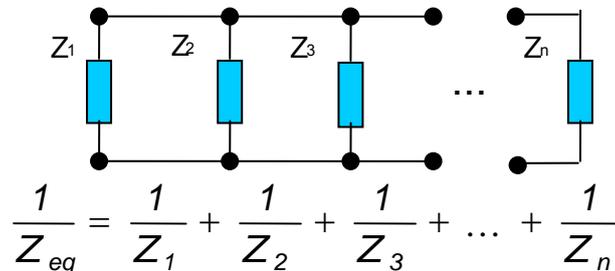
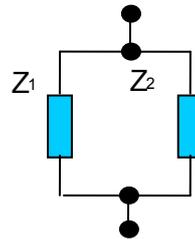


Figura 6.4.11 associação paralela de impedâncias.

Como mostra a figura 6.4.12, a **Impedância equivalente (Z_{eq}) de duas (e somente duas) impedâncias em paralelo**: é a razão do produto pela soma das duas impedâncias da associação:

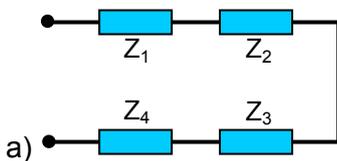
$$Z_{eq} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$



$$Z_{eq} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

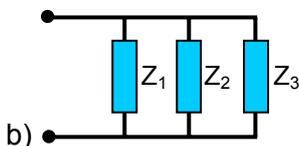
Figura 6.4.12 associação de duas impedâncias em paralelo.

Exemplo 6.4.2: Determine a impedância equivalente para os circuitos, onde $Z_1=10+j30\Omega$; $Z_2=25-j25\Omega$; $Z_3=50\Omega$ e $Z_4=-j20\Omega$.



Como a associação é série, simplesmente somamos as impedâncias:

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = (10 + j30) + (25 - j25) + (50) + (-j20) = 85 - j15 \Omega$$



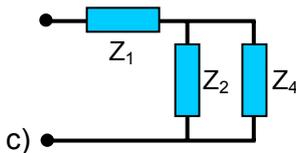
A associação é em paralelo, então fazemos pelo inverso da soma dos inversos:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{(10 + j30)} + \frac{1}{(25 - j25)} + \frac{1}{50} = \frac{1\angle 0}{31,6\angle 71,6} + \frac{1\angle 0}{35,35\angle -45} + \frac{1}{50} =$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = (0,0316\angle -71,6) + (0,02828\angle 45) + (0,02\angle 0)$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = (0,01 - j0,03) + (0,02 + j0,02) + (0,02) = 0,05 - j0,01$$

$$Z_{eq} = \frac{1}{0,05 - j0,01} = \frac{1\angle 0}{0,05\angle -11,3} = 20\angle +11,3^\circ \Omega$$



Este é um circuito misto. Devemos começar pela associação paralela de Z_2 com Z_4 . Podemos determinar pela relação do produto pela soma:

$$Z' = \frac{Z_2 \cdot Z_4}{Z_2 + Z_4} = \frac{(25 - j25) \cdot (-j20)}{(25 - j25) + (-j20)} = \frac{(35,35\angle -45) \cdot 20\angle -90}{25 - j45} = \frac{707\angle -135}{51,47\angle -60,95} = 13,74\angle -74,05^\circ$$

Como Z' está associada em série com Z_1 , somamos as duas impedâncias:

$$Z_{eq} = Z' + Z_1 = (13,74\angle -74,05^\circ) + (10 + j30) = (3,78 - j13,21) + (10 + j30) = 13,78 + j16,79 \Omega$$

6.4.3. Tabelas-resumo

Relações entre Tensão e Corrente nos Elementos Passivos (RLC)					
Elemento	Comportamento	Domínio Tempo		Domínio Fasorial	
		Unidade	Relação	Relação	Unidade
Resistor	Corrente em fase com a tensão	Ohm, Ω	$R = \frac{v_R(t)}{i_R(t)}$	$R = \frac{\dot{V}_R}{\dot{I}_R}$	Ohm, Ω
Capacitor	Corrente adiantada 90° da tensão	Farad, F	$i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$	$X_C = \frac{\dot{V}_C}{\dot{I}_C}$	Ohm, Ω
Indutor	Corrente atrasada 90° da tensão	Henry, H	$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$	$X_L = \frac{\dot{V}_L}{\dot{I}_L}$	Ohm, Ω
Impedância	Corrente defasada da tensão	Ohm, Ω	-	$Z = \frac{\dot{V}_Z}{\dot{I}_Z}$	Ohm, Ω

Relações entre Tensão e Corrente nos Elementos Passivos (RLC)					
	Unidade	Natureza	Forma Retangular	Forma Polar	Módulo
Resistência R	Ohm, Ω	Real	R	R	R
Reatância Capacitiva X_C	Ohm, Ω	Imaginário Negativo	$X_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$	$X_C = X_C \angle (-90^\circ)$	$ X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$
Reatância Indutiva X_L	Ohm, Ω	Imaginário Positivo	$X_L = j \cdot \omega \cdot L$	$X_L = X_L \angle (+90^\circ)$	$ X_L = \omega \cdot L$
Impedância Z	Ohm, Ω	Complexo	$Z = R \pm jX$	$Z = Z \angle \pm \phi$	$ Z = \sqrt{R^2 + X ^2}$

$$v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_V) = \sqrt{2} \cdot V_{ef} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_V) \Rightarrow \dot{V} = V_{ef} \angle \theta_V$$

$$i(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_I) = \sqrt{2} \cdot I_{ef} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_I) \Rightarrow \dot{I} = I_{ef} \angle \theta_I$$

$$V_p = \sqrt{2} \cdot V_{ef}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

$$\phi = \theta_V - \theta_I$$

onde:

ω - frequência angular [rad/s];

f – frequência [Hz];

T – período do ciclo [s];

ϕ - defasagem entre tensão e corrente [$^\circ$ ou rad];

v(t) e i(t) – tensão e corrente instantâneas, respectivamente [V e A];

V_p e I_p – tensão e corrente de pico, respectivamente [V e A];

V_{ef} e I_{ef} – tensão e corrente eficaz, respectivamente [V e A];

\dot{V} e \dot{I} - fasor tensão e corrente, respectivamente [V e A];

θ_V e θ_I – ângulo de fase inicial da tensão e da corrente, respectivamente [$^\circ$ ou rad];

Convenções de Sinais		
Defasagem ϕ	Positiva	Teor Indutivo
	Negativa	Teor Capacitivo
	Zero	Teor Resistivo

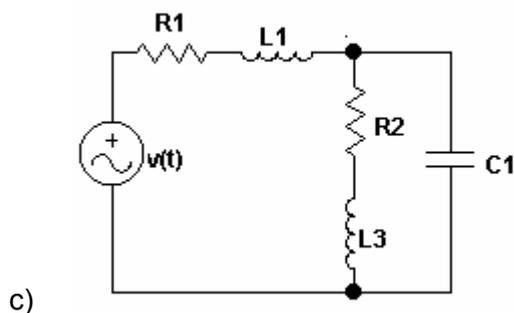
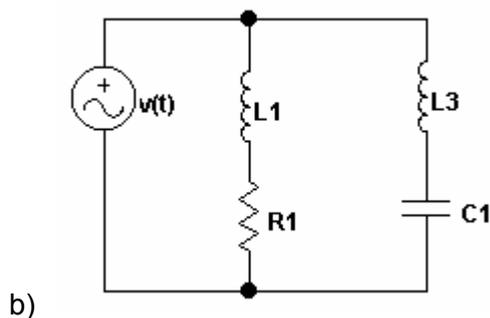
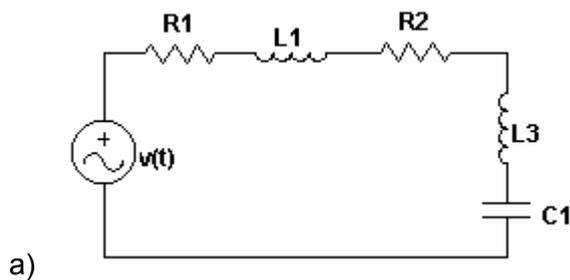
6.4.4. Exercícios

6.4.4.1) Dados os pares de tensão e corrente numa carga, calcule a impedância, desenhe o triângulo de impedância e determine o teor da carga:

- $v(t) = 200 \text{ sen}(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$ e $i(t) = 10 \text{ sen}(\omega t + 30^\circ) \text{ A}$
- $v(t) = 50 \text{ sen}(377t + 20^\circ) \text{ V}$ e $i(t) = 5 \text{ sen}(377t - 70^\circ) \text{ mA}$
- $v(t) = 300 \text{ sen}(1000t + 10^\circ) \text{ V}$ e $i(t) = 60 \text{ sen}(1000t + 100^\circ)$
- $v(t) = 220\sqrt{2} \text{ sen}(377t + 60^\circ) \text{ V}$ e $i(t) = 22\sqrt{2} \text{ cos}(377t)$

6.4.4.2) Dados os circuitos, determine a impedância equivalente, considerando uma frequência de 1000Hz.

Dados: $R1=50\Omega$; $R2=100\Omega$; $L1=50\text{mH}$; $L3=20\text{mH}$; $C1=20\mu\text{F}$



6.5. ADMITÂNCIA

Definimos Admitância Y como sendo o inverso da impedância Z . Assim:

$$Y = \frac{1}{Z}$$

Como,

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}}$$

A admitância é a razão entre o fasor da corrente e o fasor da tensão:

$$Y = \frac{i}{\hat{V}}$$

Unidade: Siemens (S, mho ou Ω^{-1})

A impedância de um circuito quantifica em ohms a oposição que este circuito oferece à passagem da corrente elétrica em CA, assim como a resistência em CC.

A admitância de um circuito quantifica em Siemens a facilidade que este circuito oferece à passagem da corrente elétrica em CA, assim como a condutância em CC.

Da mesma forma que a impedância, a admitância também é um número complexo.

A parte real da admitância é a **Condutância G**, e a parte imaginária da admitância é a **Susceptância B**. Assim:

$$Y = G + j \cdot B$$

Admitância, condutância e susceptância têm suas unidades expressas em Siemens S (ou mho).

Temos então que:

$$Y = G + j \cdot B = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + j \cdot X}$$

Importante: a equação acima deve ser analisada cuidadosamente; ela não estabelece que a parte real da admitância é igual à recíproca da parte real da impedância, ou que a parte imaginária da admitância é igual à recíproca da parte imaginária da impedância. Ou seja:

$$Y = G + jB \neq \left(\frac{1}{R} + j \frac{1}{X} \right)$$

A admitância sendo uma quantidade complexa pode ser expressa na forma polar:

$$Y = G + j \cdot B = |Y| \angle \phi$$

na qual:

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$\phi = \text{arctg} \left(\frac{B}{G} \right)$$

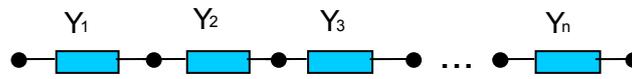
Admitância Y é o inverso da Impedância Z
Condutância G é o inverso da Resistência R
Susceptância B é o inverso da Reatância X

6.5.1. Associações de Admitâncias

Como a admitância é a reciprocidade da impedância então podemos estabelecer que, para associações de admitâncias:

- **A admitância equivalente Y_{eq} de uma associação de admitâncias em série:** o inverso da admitância equivalente de uma associação série é dada pela soma dos inversos das admitâncias da associação, como mostra a figura 6.5.1.

$$\frac{1}{Y_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Y_i}$$

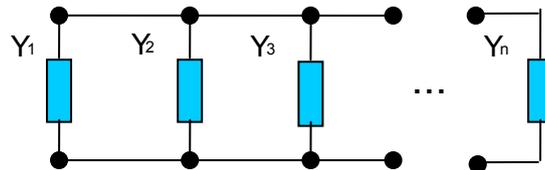


$$\frac{1}{Y_e} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_3} + \dots + \frac{1}{Y_n}$$

Figura 6.5.1 – associação série de admitâncias.

- **A admitância equivalente Y_{eq} para uma associação de admitâncias em paralelo:** é dada pela soma das admitâncias da associação, como mostra a figura 6.5.2.

$$Y_{eq} = \sum_{i=1}^n Y_i$$



$$Y_e = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n$$

Figura 6.5.2 – associação paralela de admitâncias.

Exemplo 6.5.1: Duas admitâncias $Y_1=0,4+j0,2$ e $Y_2=0,25-j0,5$ estão associadas em série. Determine a admitância equivalente e a impedância equivalente da associação:

Duas admitâncias em série podem ser obtidas pela relação entre produto e soma:

$$Y_{eq} = \frac{Y_1 \cdot Y_2}{Y_1 + Y_2} = \frac{(0,4 + j0,2) \cdot (0,25 - j0,5)}{(0,4 + j0,2) + (0,25 - j0,5)} = \frac{(0,45 \angle 26,56^\circ) \cdot (0,56 \angle -63,43^\circ)}{0,65 - j0,3}$$

$$Y_{eq} = \frac{0,252 \angle -36,87}{0,72 \angle -24,78} = 0,35 \angle -12,09^\circ = 0,34 - j0,07 \text{ S}$$

$$Z_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}} = \frac{1 \angle 0^\circ}{0,35 \angle -12,09^\circ} = 2,86 \angle +12,09^\circ = 2,8 + j0,6 \Omega$$

6.5.2. Diagrama de Admitâncias

Como é de se esperar, existe um diagrama de admitância que pode ser traçado sobre um plano cartesiano complexo de admitâncias que tem um eixo de condutância horizontal G , um eixo de susceptância vertical jB . Existe também um triângulo de admitância que é usado similarmente em relação ao triângulo da impedância. A figura 6.5.3 mostra o diagrama e o triângulo de admitâncias.

Importante: devemos notar que:

- teor indutivo $\Rightarrow \phi$ negativo
- teor capacitivo $\Rightarrow \phi$ positivo

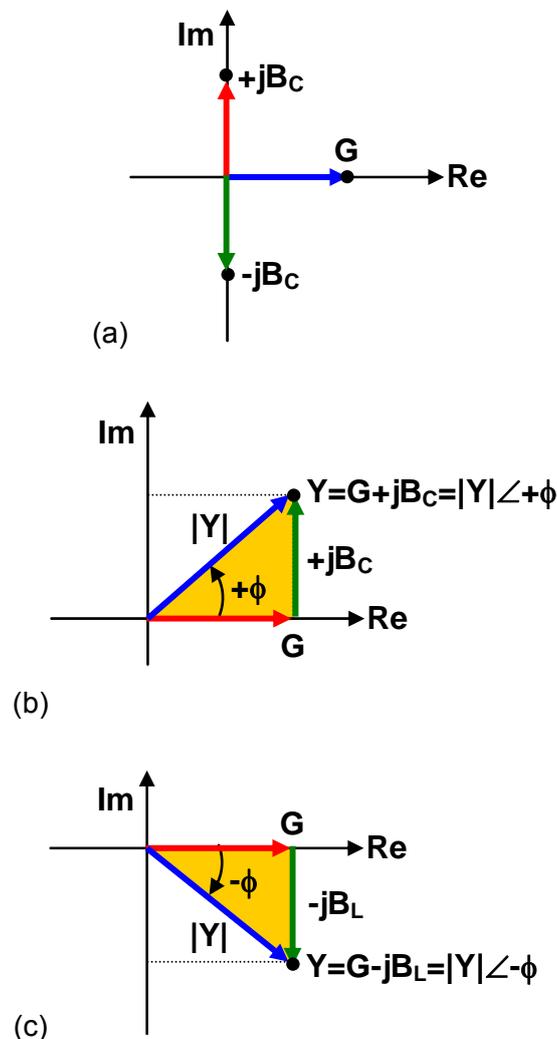


Figura 6.5.3 – (a) Diagrama de Admitâncias e Triângulo de Admitâncias; (b) cargas capacitivas formam um triângulo de admitâncias positivo; (c) cargas indutivas formam um triângulo de admitâncias negativo.

6.6. ANÁLISE DE CIRCUITOS DE CORRENTE ALTERNADA

Os circuitos elétricos de corrente alternada podem, geralmente, ser analisados através dos mesmos métodos e teoremas usados para a análise de circuitos de corrente contínua, utilizando-se para tanto, a representação fasorial dos sinais senoidais e as operações algébricas dos números complexos.

O estudo detalhado dos métodos e teoremas para a análise de circuitos de corrente alternada será abordado em outro curso, não sendo, portanto, objetivo deste trabalho. Abordaremos a análise de alguns circuitos simples de corrente alternada através de exemplos.

6.6.1. Análise de Circuitos RC

Exemplo 6.6.1: Um sinal senoidal $v(t) = \sqrt{2} \cdot 200 \cdot \text{sen}(2000 \cdot t)$ é aplicado a um resistor ideal de 25Ω associado em série com um capacitor ideal de $20\mu\text{F}$, como mostra a figura 6.6.1.

- Determine o valor dos componentes no domínio fasorial;
- Determine a impedância equivalente, o triângulo de impedâncias e o teor do circuito;
- Determine as correntes nos três elementos do circuito, nos domínios fasorial e temporal;

- d) Determine as tensões nos três elementos do circuito, nos domínios fasorial e temporal;
- e) Trace o diagrama fasorial dos sinais nos três elementos;
- f) Trace o diagrama temporal dos sinais nos três elementos.

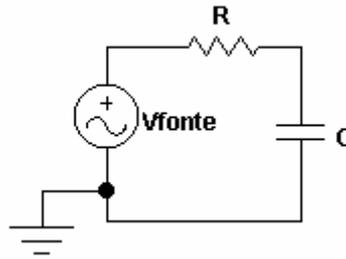


Figura 6.6.1 – Circuito RC série para o exemplo 6.6.1.

No domínio fasorial, o resistor vale os mesmos 25Ω . Devemos calcular o valor da reatância capacitiva:

$$X_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 2000 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = -j25 \Omega$$

Como o circuito é série, a impedância equivalente é dada pela soma das impedâncias, assim:

$$Z_{eq} = Z_R + Z_C = R + X_C = 25 - j25 = 35,36 \angle -45^\circ \Omega$$

O triângulo de impedâncias está apresentado na figura 6.6.2 e tem teor capacitivo pois o sinal da impedância é negativo.

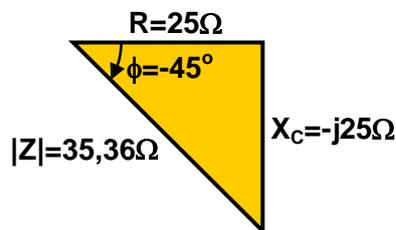


Figura 6.6.2 – Triângulo de impedâncias – teor capacitivo – para o exemplo 6.6.1

O fasor corrente fornecida pela fonte é dada pela relação entre o fasor tensão da fonte e a impedância equivalente do circuito:

$$\dot{i}_F = \frac{\dot{V}}{Z_{eq}} = \frac{200 \angle 0^\circ}{35,36 \angle -45^\circ} = 5,66 \angle +45^\circ$$

Como o circuito é série, então a corrente em todos os elementos é a mesma:

$$\dot{i}_R = \dot{i}_C = \dot{i}_F = 5,66 \angle +45^\circ \text{ A}$$

No domínio temporal a corrente é dada na forma trigonométrica:

$$i(t) = 5,66 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t + 45^\circ) = 8 \cdot \text{sen}(2000 \cdot t + 45^\circ) \text{ A}$$

A tensão da fonte foi dada. A tensão nos terminais do resistor é dada pela Lei de Ohm através do fasor:

$$\dot{V}_R = R \cdot \dot{i}_R = 25 \cdot 5,66 \angle 45^\circ = 141,5 \angle 45^\circ \text{ V}$$

Na forma trigonométrica:

$$v_R(t) = 141,5\sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t + 45^\circ) \text{ V}$$

Como podemos perceber, tanto o fasor tensão como o fasor corrente nos terminais do resistor tem o mesmo ângulo, o que representa que estão em fase (defasagem nula), como esperávamos.

A tensão nos terminais do capacitor é dada pela Lei de Ohm aplicada à reatância capacitiva:

$$\dot{V}_C = X_C \cdot \dot{I}_C = -j25 \cdot 5,66 \angle 45^\circ = 25 \angle -90^\circ \cdot 5,66 \angle 45^\circ = 141,5 \angle -45^\circ \text{ V}$$

Na forma trigonométrica:

$$v_C(t) = 141,5\sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t - 45^\circ) \text{ V}$$

Como o ângulo da tensão nos terminais do capacitor é -45° e o ângulo da corrente é $+45^\circ$, a defasagem é -90° , o que indica que a corrente está adiantada de 90° da tensão.

A figura 6.6.3 apresenta o diagrama fasorial completo para o circuito. Pelo diagrama fasorial, podemos observar claramente que a tensão e a corrente no resistor estão em fase e que a corrente está adiantada de 90° da tensão no capacitor. Já nos terminais da fonte, podemos verificar que a corrente está adiantada de 45° da tensão, caracterizando um circuito com teor capacitivo (RC).

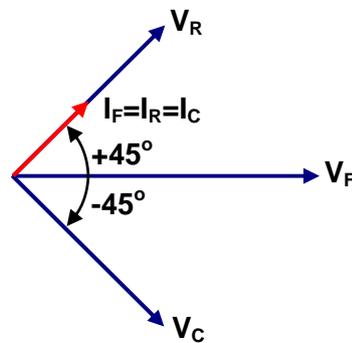


Figura 6.6.3 – Diagrama fasorial para o exemplo 6.6.1.

Podemos atribuir valores para a variável t nas formas trigonométricas e traçar as formas de onda para as tensões e correntes, como mostra a figura 6.6.4. Pelas curvas, podemos verificar, mais uma vez, a defasagem de 90° entre tensão e corrente no capacitor, a corrente adiantada de 45° da tensão na fonte e a corrente em fase com a tensão no resistor.

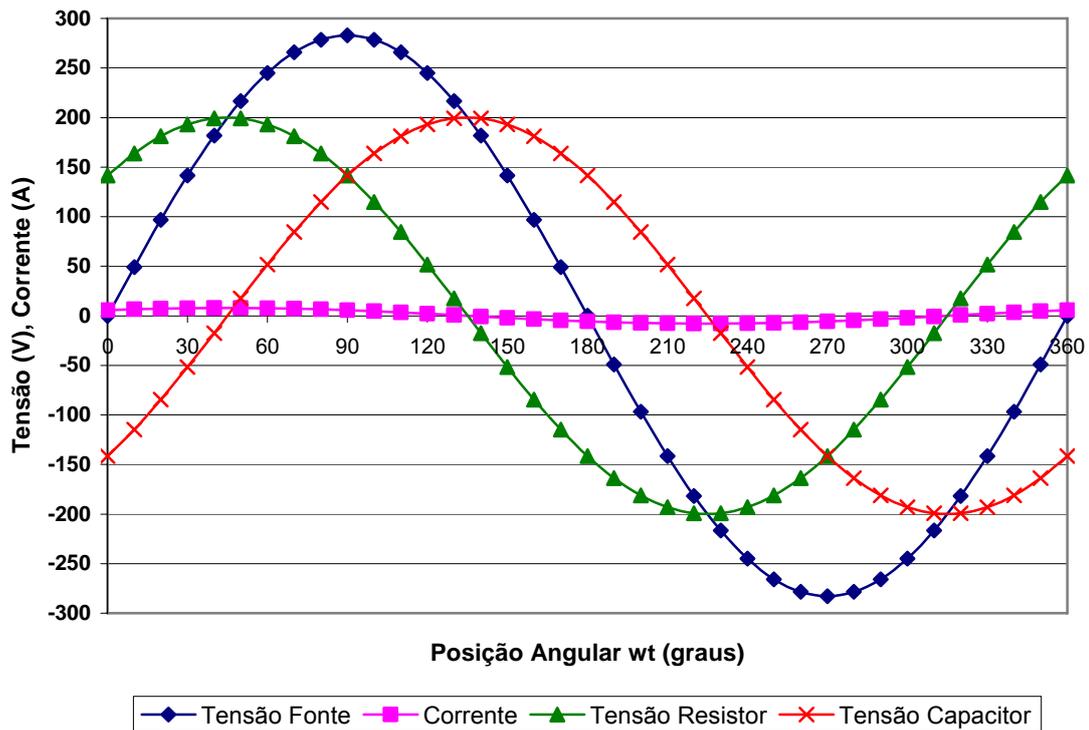


Figura 6.6.4 – Formas de onda de tensão e corrente para o circuito do exemplo 6.6.1.

6.6.2. Análise de Circuitos RL

Exemplo 6.6.2: Um sinal senoidal $v(t) = \sqrt{2} \cdot 200 \cdot \text{sen}(2000 \cdot t)$ é aplicado a um resistor ideal de 25Ω associado em série com um capacitor ideal de 25mH , como mostra a figura 6.6.5.

- Determine o valor dos componentes no domínio fasorial;
- Determine a impedância equivalente, o triângulo de impedâncias e o teor do circuito;
- Determine as correntes nos três elementos do circuito, nos domínios fasorial e temporal;
- Determine as tensões nos três elementos do circuito, nos domínios fasorial e temporal;
- Trace o diagrama fasorial dos sinais nos três elementos;
- Trace o diagrama temporal dos sinais nos três elementos.

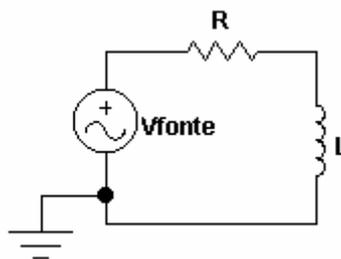


Figura 6.6.5 – Circuito RL série para o exemplo 6.6.1.

No domínio fasorial, o resistor vale os mesmos 25Ω . Devemos calcular o valor da reatância indutiva:

$$X_L = j\omega L = j2000 \cdot 25 \cdot 10^{-3} = +j50 \Omega$$

Como o circuito é série, a impedância equivalente é dada pela soma das impedâncias, assim:

$$Z_{eq} = Z_R + Z_L = R + X_L = 25 + j50 = 55,9 \angle 63,43^\circ \Omega$$

O triângulo de impedâncias está apresentado na figura 6.6.6 e tem **teor indutivo**, pois o sinal da impedância é **positivo**.

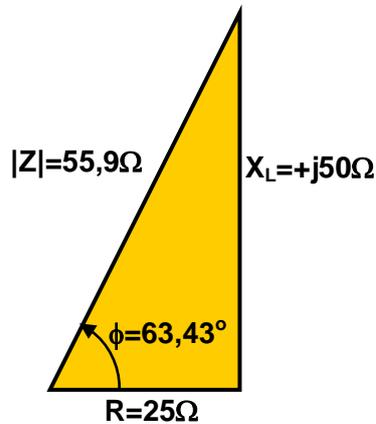


Figura 6.6.6 – Triângulo de impedâncias – teor indutivo – para o exemplo 6.6.2.

O fasor corrente fornecida pela fonte é dada pela relação entre o fasor tensão da fonte e a impedância equivalente do circuito:

$$\dot{i}_F = \frac{\dot{V}}{Z_{eq}} = \frac{200 \angle 0^\circ}{55,9 \angle 63,43^\circ} = 3,58 \angle -63,43^\circ \text{ A}$$

Como o circuito é série, então a corrente em todos os elementos é a mesma:

$$\dot{i}_R = \dot{i}_L = \dot{i}_F = 3,58 \angle -63,43^\circ \text{ A}$$

No domínio temporal a corrente é dada na forma trigonométrica:

$$i(t) = 3,58 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t - 63,43^\circ) = 5,06 \cdot \text{sen}(2000 \cdot t - 63,43^\circ) \text{ A}$$

A tensão da fonte foi dada. A tensão nos terminais do resistor é dada pela Lei de Ohm através do fasor:

$$\dot{V}_R = R \cdot \dot{i}_R = 25 \cdot 3,58 \angle -63,43^\circ = 89,5 \angle -63,43^\circ \text{ V}$$

Na forma trigonométrica:

$$v_R(t) = 89,5 \sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t - 63,43^\circ) \text{ V}$$

Como podemos perceber, tanto o fasor tensão como o fasor corrente nos terminais do resistor tem o mesmo ângulo, o que representa que estão em fase (defasagem nula), como esperávamos.

A tensão nos terminais do indutor é dada pela Lei de Ohm aplicada à reatância indutiva:

$$\dot{V}_L = X_L \cdot \dot{i}_L = j50 \cdot 3,58 \angle -63,43^\circ = 50 \angle 90^\circ \cdot 3,58 \angle -63,43^\circ = 179 \angle 26,57^\circ \text{ V}$$

Na forma trigonométrica:

$$v_L(t) = 179 \sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t + 26,57^\circ) \text{ V}$$

Como o ângulo da tensão nos terminais do indutor é $26,57^\circ$ e o ângulo da corrente é $-63,43^\circ$, a defasagem é $+90^\circ$, o que indica que a corrente está atrasada de 90° da tensão.

A figura 6.6.7 apresenta o diagrama fasorial completo para o circuito. Pelo diagrama fasorial, podemos observar claramente que a tensão e a corrente no resistor estão em fase e que a corrente está atrasada de 90° da tensão no indutor. Já nos terminais da fonte, podemos verificar que a corrente está atrasada de $63,43^\circ$ da tensão, caracterizando um circuito com teor indutivo (RL).

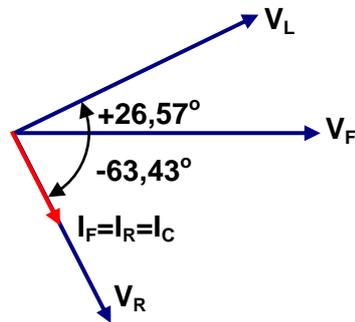


Figura 6.6.7 – Diagrama fasorial para o exemplo 6.6.2.

Podemos atribuir valores para a variável t nas formas trigonométricas e traçar as formas de onda para as tensões e correntes, como mostra a figura 6.6.8. Pelas curvas, podemos verificar, mais uma vez, a defasagem de 90° entre tensão e corrente no indutor, a corrente atrasada de $63,45^\circ$ da tensão na fonte e a corrente em fase com a tensão no resistor. Para efeitos de escala a corrente está multiplicada por 10.

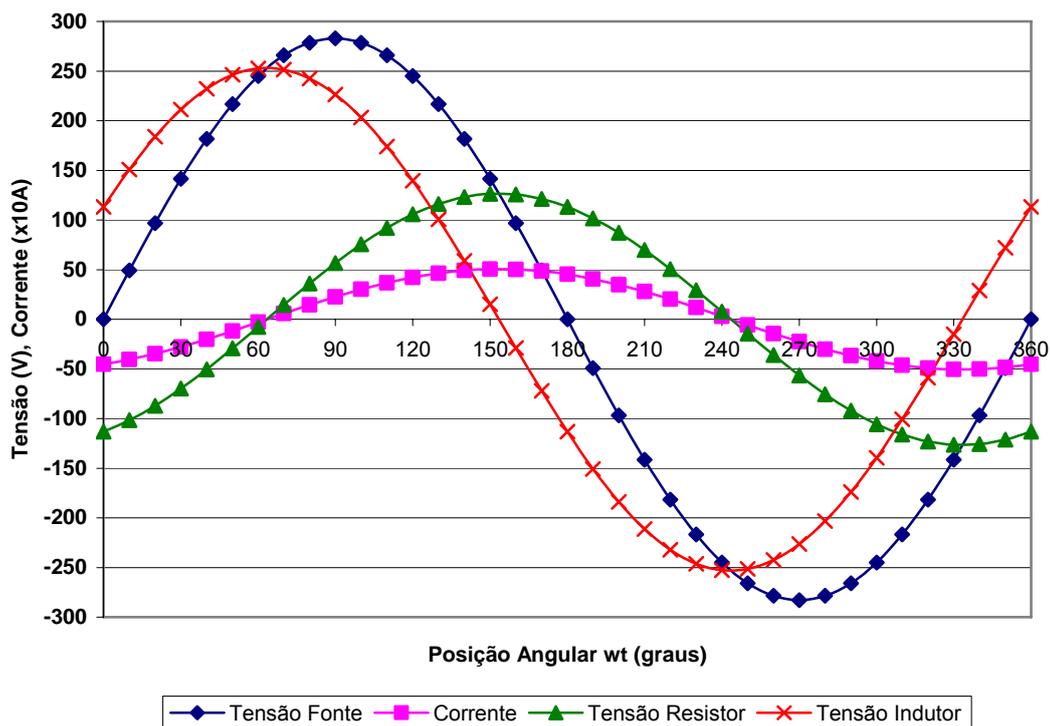


Figura 6.6.8 – Formas de onda de tensão e corrente para o circuito do exemplo 6.6.2.

6.6.3. Análise de Circuitos RLC

Exemplo 6.6.3: Um sinal senoidal $v(t) = \sqrt{2} \cdot 200 \cdot \text{sen}(2000 \cdot t)$ é aplicado a um resistor ideal de 25Ω associado em série com um indutor ideal de 25mH e a um capacitor ideal de $20\mu\text{F}$, como mostra a figura 6.6.9.

- a) Determine o valor dos componentes no domínio fasorial;

- Determine a impedância equivalente, o triângulo de impedâncias e o teor do circuito;
- Determine as correntes nos três elementos do circuito, nos domínios fasorial e temporal;
- Determine as tensões nos três elementos do circuito, nos domínios fasorial e temporal;
- Trace o diagrama fasorial dos sinais nos três elementos;
- Trace o diagrama temporal dos sinais nos três elementos.

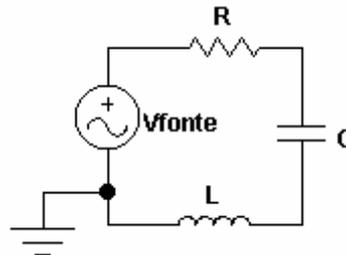


Figura 6.6.9 – Circuito RLC série para o exemplo 6.6.3.

Dos exemplos 6.6.1 e 6.6.2, já conhecemos as reatâncias capacitivas e indutivas. Assim, como o circuito é uma conexão série, para obtermos a impedância equivalente, devemos somar as impedâncias dos elementos:

$$Z_{eq} = Z_R + Z_C + Z_L = R + X_C + X_L = 25 - j25 + j50$$

$$Z_{eq} = 25 + j25 = 35,36 \angle 45^\circ \Omega$$

O triângulo de impedâncias resultante está apresentado na figura 6.6.10. Do ângulo da impedância, podemos concluir que o circuito apresenta teor predominantemente indutivo, apesar de também possuir capacitor.

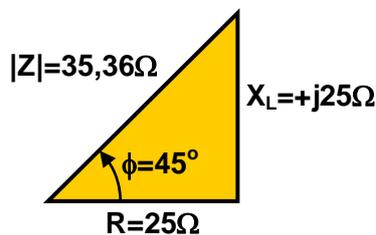


Figura 6.6.10 – Triângulo de impedâncias – teor indutivo – para o exemplo 6.6.3.

A corrente no circuito é a mesma em todos os elementos, pois estão em série:

$$\dot{I}_F = \dot{I}_R = \dot{I}_C = \dot{I}_L = \frac{\dot{V}}{Z_{eq}} = \frac{200 \angle 0^\circ}{35,36 \angle 45^\circ} = 5,66 \angle -45^\circ \text{ A}$$

A corrente na forma trigonométrica:

$$i(t) = 5,66 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t - 45^\circ) \text{ A}$$

O fasor tensão no resistor é dada pela Lei de Ohm:

$$\dot{V}_R = R \cdot \dot{I}_R = 25 \cdot 5,66 \angle -45^\circ = 141,5 \angle -45^\circ \text{ V}$$

Na forma trigonométrica: $v_R(t) = 141,5 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t - 45^\circ) \text{ V}$

A tensão no capacitor é dada pelo produto da reatância capacitiva pelo fasor corrente:

$$\dot{V}_C = X_C \cdot \dot{I}_C = -j25 \cdot 5,66 \angle -45^\circ = 25 \angle -90^\circ \cdot 5,66 \angle -45^\circ = 141,5 \angle -135^\circ \text{ V}$$

Na forma trigonométrica: $v_C(t) = 141,5 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t - 135^\circ) \text{ V}$

A tensão no indutor é o produto da reatância indutiva pelo fasor corrente no indutor:

$$\dot{V}_L = X_L \cdot \dot{I}_L = +j25 \cdot 5,66 \angle -45^\circ = 25 \angle +90^\circ \cdot 5,66 \angle -45^\circ = 141,5 \angle +45^\circ$$

Na forma trigonométrica: $v_L(t) = 141,5 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t + 45^\circ) \text{ V}$

Como os fasores de tensão e corrente podemos traçar o diagrama fasorial da figura 6.6.11. No diagrama fasorial observamos claramente que a tensão e a corrente no resistor estão em fase. A corrente no indutor está atrasada de 90° da tensão. A corrente no capacitor está adiantada de 90° da tensão. Isso resulta que, na fonte, a corrente está atrasada de 45° da tensão, proporcionando um teor predominantemente indutivo para o circuito.

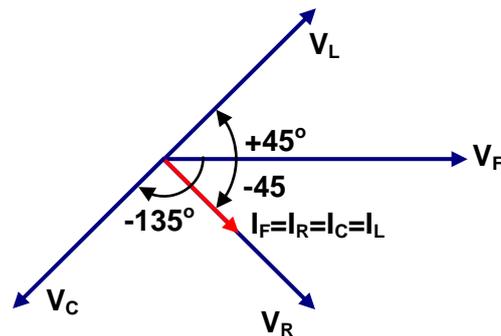


Figura 6.6.11 – Diagrama fasorial para o exemplo 6.6.3.

Podemos atribuir valores para a variável t nas formas trigonométricas e traçar as formas de onda para as tensões e correntes, como mostra a figura 6.6.12. Pelas curvas, podemos verificar, mais uma vez, a corrente adiantada de 90° da tensão no capacitor, a corrente atrasada de 90° da tensão no indutor, a corrente em fase com a tensão no resistor e a corrente atrasada de 45° da tensão na fonte. Para efeitos de escala a corrente está multiplicada por 10.

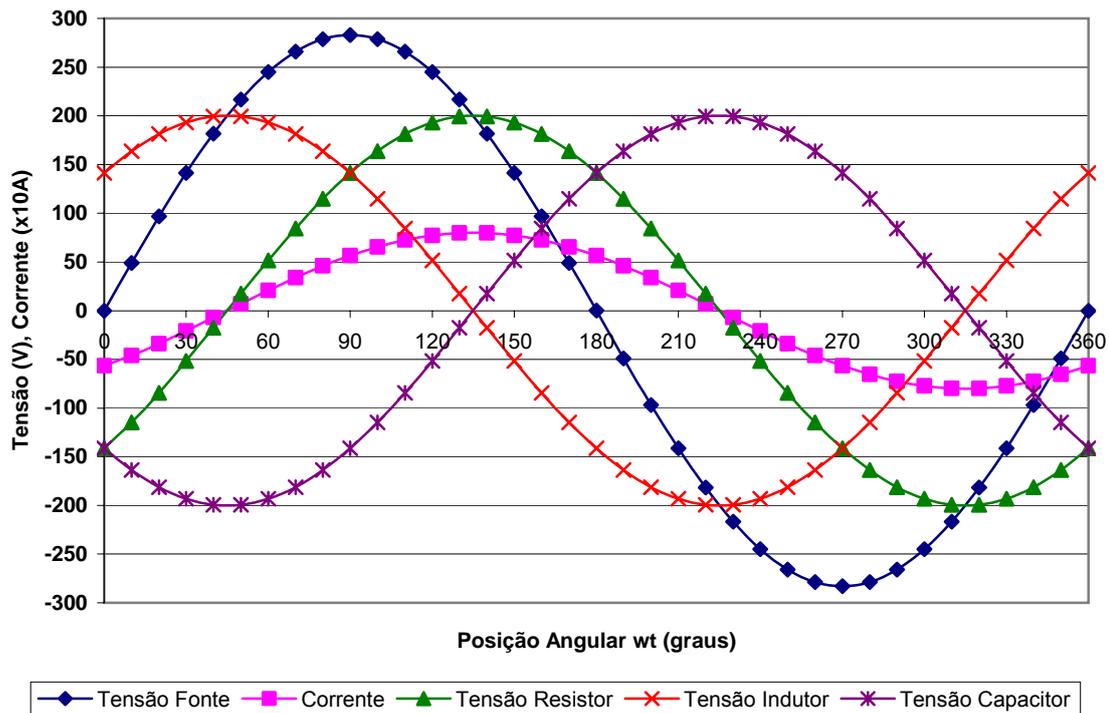


Figura 6.6.12 – Formas de onda de tensão e corrente para o circuito do exemplo 6.6.3.

Exemplo 6.6.4: Um sinal senoidal $v(t) = \sqrt{2} \cdot 200 \cdot \sin(2000 \cdot t)$ é aplicado a um resistor ideal de 25Ω associado em série com um indutor ideal de 25mH . Considere agora a conexão de um capacitor ideal de $25\mu\text{F}$ em paralelo, como mostra a figura 6.6.13.

- Determine o valor dos componentes no domínio fasorial;
- Determine a impedância equivalente, o triângulo de impedâncias e o teor do circuito;
- Determine as correntes nos três elementos do circuito, nos domínios fasorial e temporal;
- Determine as tensões nos três elementos do circuito, nos domínios fasorial e temporal;
- Trace o diagrama fasorial dos sinais nos três elementos;
- Trace o diagrama temporal dos sinais nos três elementos.

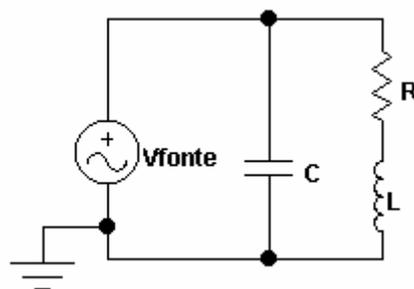


Figura 6.6.13 – Circuito RLC misto para o exemplo 6.6.4.

Os elementos desse circuito são os mesmos dos exemplos 6.6.1, 6.6.2 e 6.6.3. Portanto, as reatâncias já estão calculadas. Para determinarmos a impedância equivalente, devemos considerar que o circuito da figura 6.6.13 é uma associação mista e, como tal, devemos resolver por partes. Observando o circuito verificamos que há uma associação série do resistor como o indutor que precisa ser resolvida inicialmente. Assim, determinamos a impedância equivalente parcial Z' :

$$Z' = Z_R + Z_L = R + X_L = 25 + j50 = 55,9 \angle 63,43^\circ \Omega$$

Da inspeção visual do circuito da figura 6.6.13, verificamos que esta impedância equivalente parcial Z' está associada em paralelo com a impedância do capacitor. Assim:

$$Z_{eq} = \frac{X_C \cdot Z'}{X_C + Z'} = \frac{25 \angle -90^\circ \cdot 55,9 \angle 63,43^\circ}{-j25 + 25 + j50} = \frac{1397,5 \angle -26,57^\circ}{25 + j25} = \frac{1397,5 \angle -26,57^\circ}{35,36 \angle 45^\circ}$$

$$Z_{eq} = 39,52 \angle -71,57^\circ = 12,5 - j37,5 \Omega$$

Como o ângulo da impedância equivalente e a parte imaginária são negativos, concluímos que o circuito tem teor predominantemente **capacitivo**. O triângulo de impedâncias resultante dessa associação está apresentado na figura 6.6.14.

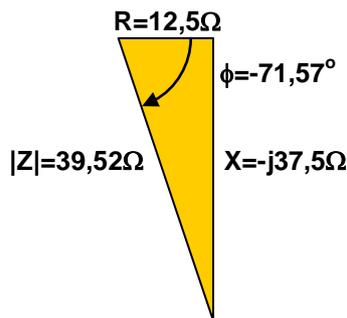


Figura 6.6.14 – Triângulo de impedâncias para o circuito do exemplo 6.6.4.

Para determinarmos as correntes nos elementos, primeiramente temos que calcular a corrente fornecida pela fonte à impedância equivalente. Assim:

$$\dot{i}_F = \frac{\dot{V}_F}{Z_{eq}} = \frac{200 \angle 0^\circ}{39,52 \angle -71,57^\circ} = 5,06 \angle +71,57^\circ \text{ A}$$

Como o circuito apresente dois nós, devido à conexão paralela do capacitor, a corrente fornecida pela fonte se divide em duas componentes: uma para o capacitor e outra para a impedância equivalente parcial Z' . Como o capacitor está em paralelo com a fonte de tensão, a tensão nos seus terminais é a mesma da fonte. Assim a corrente no capacitor é dada por:

$$\dot{i}_C = \frac{\dot{V}_C}{Z_C} = \frac{\dot{V}_F}{X_C} = \frac{200 \angle 0^\circ}{25 \angle -90^\circ} = 8 \angle +90^\circ \text{ A}$$

A impedância equivalente parcial Z' também está em paralelo com a fonte e, portanto, está aplicada à mesma tensão da fonte. Assim, podemos determinar a corrente na impedância Z' . Como esta impedância parcial é composta por dois elementos em série, a corrente no resistor e no indutor é a mesma. Assim, a corrente nestes elementos é dada por:

$$\dot{i}_{Z'} = \dot{i}_R = \dot{i}_L = \frac{\dot{V}_{Z'}}{Z'} = \frac{200 \angle 0^\circ}{55,9 \angle 63,43^\circ} = 3,58 \angle -63,43^\circ \text{ A}$$

Na forma trigonométrica as correntes são dadas por:

$$i_F(t) = 5,06 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t + 71,57^\circ)$$

$$i_C(t) = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t + 90^\circ) \text{ A}$$

$$i_R(t) = i_L(t) = 3,58 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t - 63,43^\circ) \text{ A}$$

A tensão no capacitor é a mesma da fonte, por estar em paralelo:

$$\dot{V}_C = 200 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$v_C(t) = 200 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t) \text{ V}$$

A tensão no resistor pode ser determinada pelo produto da resistência pela sua corrente:

$$\dot{V}_R = R \cdot \dot{I}_R = 25 \cdot 3,58 \angle -63,43^\circ = 89,5 \angle -63,43^\circ \text{ V}$$

$$v_R(t) = 89,5 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t - 63,43^\circ) \text{ V}$$

A tensão no indutor pode ser determinada pelo produto da reatância indutiva pela corrente no indutor:

$$\dot{V}_L = X_L \cdot \dot{I}_L = 50 \angle 90^\circ \cdot 3,58 \angle -63,43^\circ = 179 \angle 26,57^\circ \text{ V}$$

$$v_L(t) = 179 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(2000 \cdot t + 26,57^\circ)$$

Com os fasores de tensão e corrente podemos traçar o diagrama fasorial que está apresentado na figura 6.6.15. Com os sinais de tensão e corrente na forma trigonométrica podemos obter as formas de onda, como estão apresentadas na figura 6.6.16.

Analisando o diagrama fasorial e as formas de onda, podemos concluir que a corrente fornecida pela fonte está adiantada de $71,6^\circ$ da tensão da fonte, o que caracteriza um circuito com teor capacitivo. A corrente nos terminais do capacitor está adiantada de 90° da tensão em seus terminais. A corrente no resistor está em fase com a tensão em seus terminais. A corrente no indutor (que é a mesma no resistor por estar em série) está atrasada de 90° da tensão no indutor. Podemos verificar que o fasor corrente no capacitor tem módulo maior que o módulo do fasor corrente na fonte. Isso acontece porque o capacitor troca energia com o indutor no processo de carga e descarga. Pela Lei de Kirchhoff para as correntes nos nós, a corrente fornecida pela fonte deve ser a soma da corrente no capacitor com a corrente na impedância equivalente parcial Z' :

$$\dot{I}_F = \dot{I}_C + \dot{I}_{Z'} = 8 \angle 90^\circ + 3,58 \angle -63,43^\circ = (0 + j8) + (1,6 - j3,2) = 1,6 + j4,8 = 5,06 \angle 71,6^\circ$$

Isso prova que o resultado está correto, pois devemos lembrar que estamos somando fasores, que são vetores que possuem módulos e ângulos.

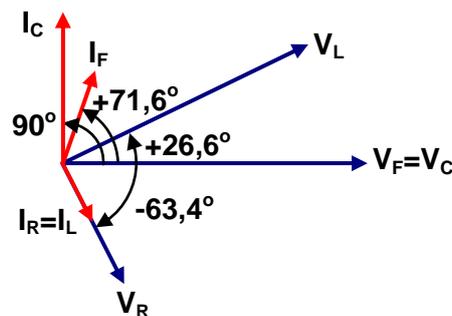


Figura 6.6.15 – Diagrama fasorial para o exemplo 6.6.4.

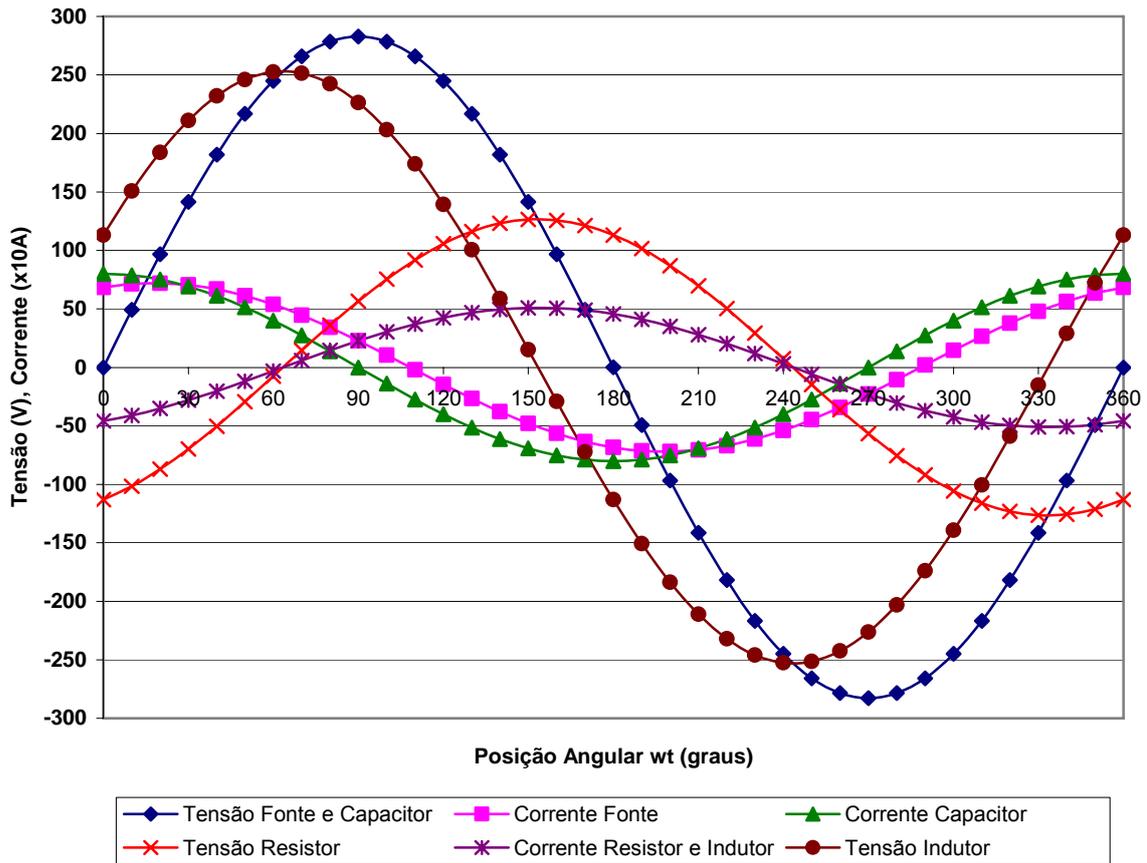


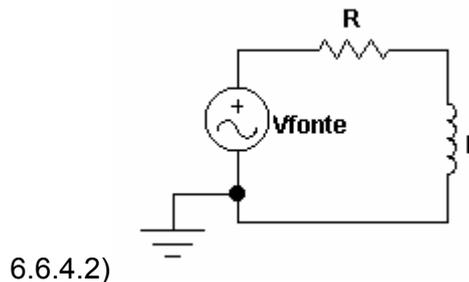
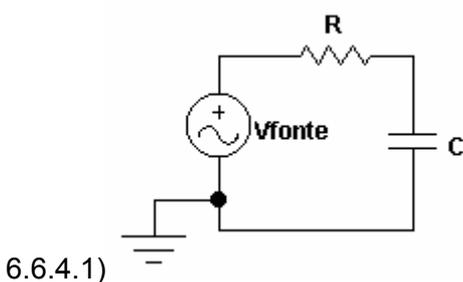
Figura 6.6.16 – Formas de onda de tensão e corrente para o circuito do exemplo 6.6.3.

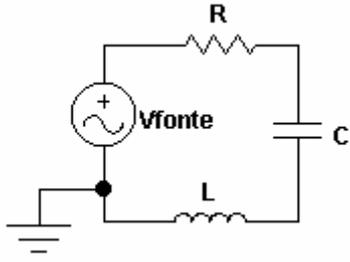
6.6.4. Exercícios:

Para os circuitos abaixo:

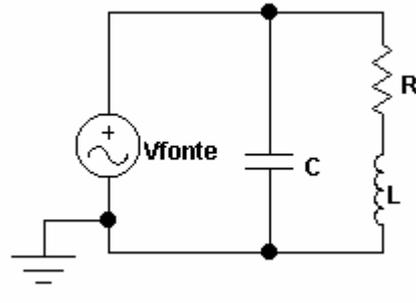
- Determine o valor dos componentes no domínio fasorial;
- Determine a impedância equivalente, o triângulo de impedâncias e o teor do circuito;
- Determine as correntes nos três elementos do circuito, nos domínios fasorial e temporal;
- Determine as tensões nos três elementos do circuito, nos domínios fasorial e temporal;
- Trace o diagrama fasorial dos sinais nos três elementos;
- Trace o diagrama temporal dos sinais nos três elementos;
- Simule os circuitos em *software* de simulação eletrônica para verificar as formas de onda encontradas e conferir os valores calculados.

Dados: $v_F(t) = 12\sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t) \text{ V}$; $R1=2\Omega$; $L=10\text{mH}$; $C=660\mu\text{F}$

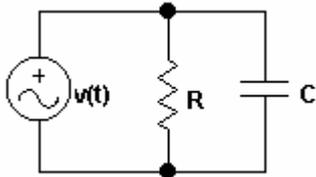




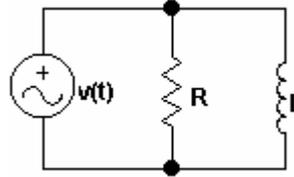
6.6.4.3)



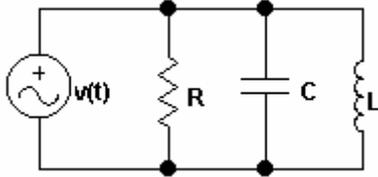
6.6.4.4)



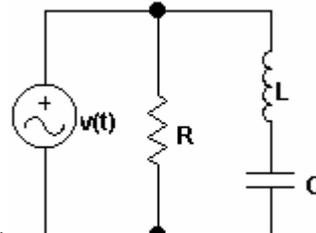
6.6.4.5)



6.6.4.6)



6.6.4.7)



6.6.4.8)

7. POTÊNCIA E ENERGIA ELÉTRICA EM CORRENTE ALTERNADA

Quando analisamos um circuito em termos de energia, estamos interessados na quantidade de energia, em função do tempo, entregue pelas fontes ao circuito e na quantidade de energia consumida ou armazenada nos componentes passivos. Sabemos que:

$$E_n = P \cdot t \quad (\text{J})$$

onde:

E_n – energia elétrica [J];

P – potência elétrica [W];

t – tempo [s]

$$P = \frac{E_n}{t} \quad (\text{W})$$

Isto é, estamos interessados no comportamento da potência do circuito, pois **potência é a variação da energia em função do tempo**. A potência elétrica representa a velocidade com que se realiza um trabalho elétrico.

Do estudo de circuitos em corrente contínua, sabemos que a potência é dada pelo produto da tensão pela corrente, pois a tensão representa a quantidade de energia capaz de movimentar uma certa quantidade de cargas elétricas ($V=J/C$) e corrente representa o fluxo de cargas num dado intervalo de tempo ($A=C/s$). Portanto, o produto da tensão pela corrente representa a quantidade de trabalho (energia) realizado num dado intervalo de tempo:

$$\frac{J}{C} \cdot \frac{C}{s} = \frac{J}{s} = W$$

Assim para o circuito da figura 7.1 a potência fornecida pela fonte é dada por:

$$P = V \cdot I \quad (\text{W})$$

onde V e I são constantes. Portanto, a potência fornecida pela fonte CC ao resistor é uma constante.

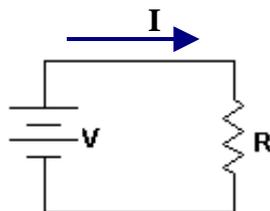


Figura 7.1 – Fonte de tensão contínua alimentando uma resistência

7.1. POTÊNCIA INSTANTÂNEA

Seja uma fonte de tensão alternada senoidal $v(t)$ fornecendo uma corrente alternada senoidal $i(t)$ a uma dada impedância de carga Z , conforme o circuito da figura 7.1.1. Em corrente alternada, para uma dada carga de impedância $Z=R \pm jX$ como mostra a figura 7.1.1, a tensão e a corrente serão senoidais. Assim:

$$v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_V)$$

$$i(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_I)$$

tomando a tensão como referência, temos $\theta_V = 0^\circ$. A defasagem ϕ entre tensão e corrente pode ser dada por:

$$\phi = \theta_V - \theta_I = 0 - \theta_I$$

$$\phi = -\theta_I$$

e

$$\theta_I = -\phi$$

Substituindo:

$$v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

$$i(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \phi)$$

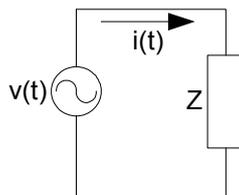


Figura 7.1.1 – Fonte de tensão alternada senoidal alimentando uma impedância Z.

Neste caso, como $v(t)$ e $i(t)$ não são constantes no tempo, a potência também não será constante no tempo. A **potência instantânea $p(t)$** na impedância Z do circuito da figura 7.1.1 pode ser determinada pelo **produto da tensão instantânea pela corrente instantânea**:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (\text{W})$$

substituindo as equações de $v(t)$ e $i(t)$,

Portanto:

$$p(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \phi)$$

$$p(t) = V_p \cdot I_p \cdot [\text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \phi)]$$

Considerando a identidade trigonométrica:

$$\text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$p(t) = V_p \cdot I_p \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \cos(\omega \cdot t - \omega \cdot t + \phi) - \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \omega \cdot t - \phi) \right]$$

desenvolvendo a equação acima chega-se à **Equação Geral da Potência Instantânea**:

$$p(t) = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos \phi - \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \phi)$$

Observando a equação acima percebemos que a potência instantânea é composta por dois termos:

- um termo **constante** (independente do tempo) $\Rightarrow p_1(t) = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos \phi$
- um termo **variável** (função do tempo) $\Rightarrow p_2(t) = -\frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \phi)$

O primeiro termo, constante ao longo do tempo, é representado graficamente por uma reta. O segundo termo, variável em função do tempo, é representado graficamente por uma cossenoide negativa com o dobro da frequência (2ω) do sinal de tensão e de corrente. A potência instantânea $p(t)$ é, portanto, a soma dos dois termos, $p_1(t)+p_2(t)$, como mostra a figura 7.1.2.

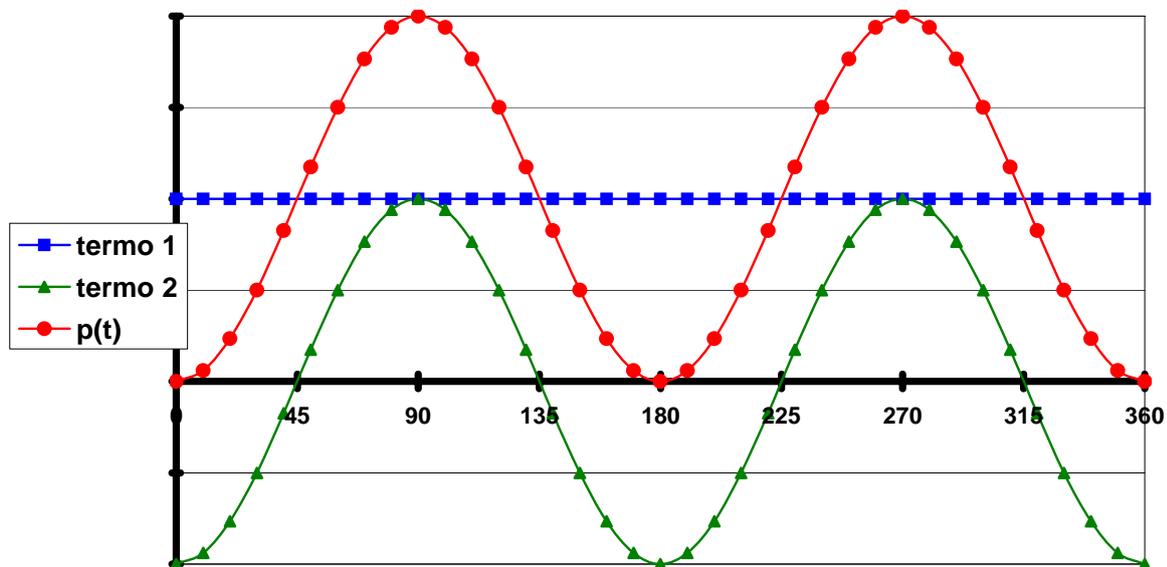


Figura 7.1.2 – Potência instantânea é formada por um termo constante e uma cossenoide negativa.

A análise da potência instantânea está relacionada mais com a parte de proteção dos circuitos. Por exemplo se a potência máxima instantânea num ponto do circuito é de 1 W, não podemos colocar neste ponto um componente que dissipe no máximo 0,5 W.

Continuando o desenvolvimento da equação geral da potência instantânea e utilizando a identidade trigonométrica

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

podemos obter:

$$p(t) = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos \phi - \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot [\cos(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \cos(-\phi) - \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \sin(-\phi)]$$

como $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ e $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, substituindo:

$$p(t) = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos \phi - \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot [\cos(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \cos(\phi) + \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \sin(\phi)]$$

$$p(t) = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos \phi - \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \cos(\phi) - \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \sin(\phi)$$

agrupando os termos, obtemos a **equação geral ampliada da potência instantânea**:

$$p(t) = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos \phi \cdot [1 - \cos(2 \cdot \omega \cdot t)] - \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \sin \phi \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$$

7.2. POTÊNCIA MÉDIA OU POTÊNCIA ATIVA

No estudo de fornecimento, consumo e armazenamento de energia em circuitos elétricos, geralmente utilizamos o valor médio da potência e não o valor instantâneo de potência.

O valor médio da potência é dado pela integral da função no período dividido pelo período, ou seja:

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) \cdot dt$$

onde T é o período da forma de onda da potência instantânea.

Para uma função periódica como a função p(t), o valor médio é igual a soma das áreas formadas entre a curva da função e o eixo horizontal do plano cartesiano, durante um ciclo completo, dividida pelo período da função. Sendo que: **áreas acima do eixo são positivas e áreas abaixo do eixo são negativas**.

Para p(t) temos:

- a) Valor médio do termo constante de p(t):** o valor médio de um termo constante é o seu próprio valor e é representado por uma reta, como mostra a figura 7.2.1. Este termo médio representa transferência e dissipação (consumo) de energia na carga.

$$p_1(t) = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos \phi$$

$$P_1 = \frac{A_1}{T}$$

onde:

A₁ – área sob o valor do termo constante no período T;

T – período da forma de onda da potência instantânea.

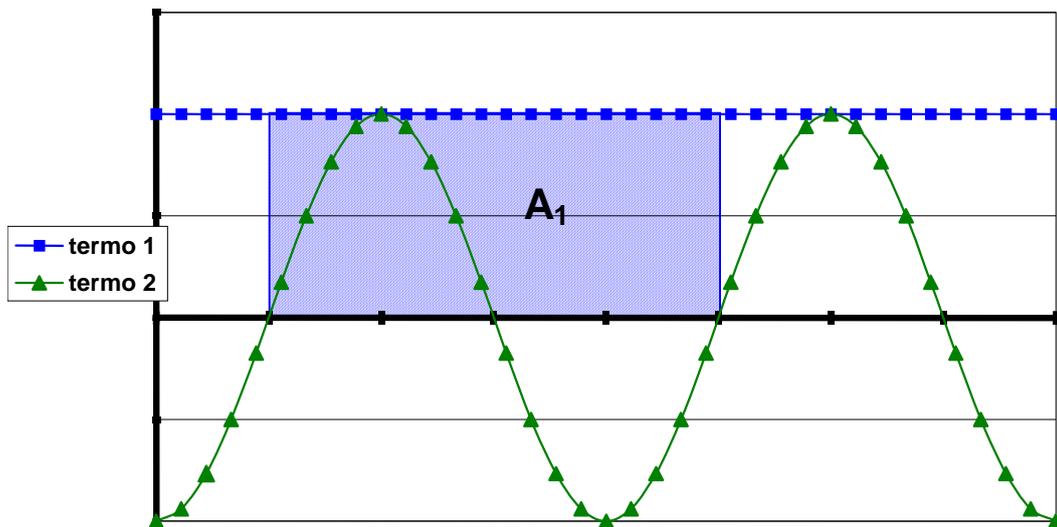


Figura 7.2.1 – Área sob o valor do termo constante de $p(t)$.

- b) **Valor médio do termo variável de $p(t)$:** o termo variável $p_2(t)$ é uma cossenóide negativa cujo valor de pico é $\frac{V_p \cdot I_p}{2}$ e cuja frequência é o dobro da frequência da tensão e da corrente, como mostra a figura 7.2.2.

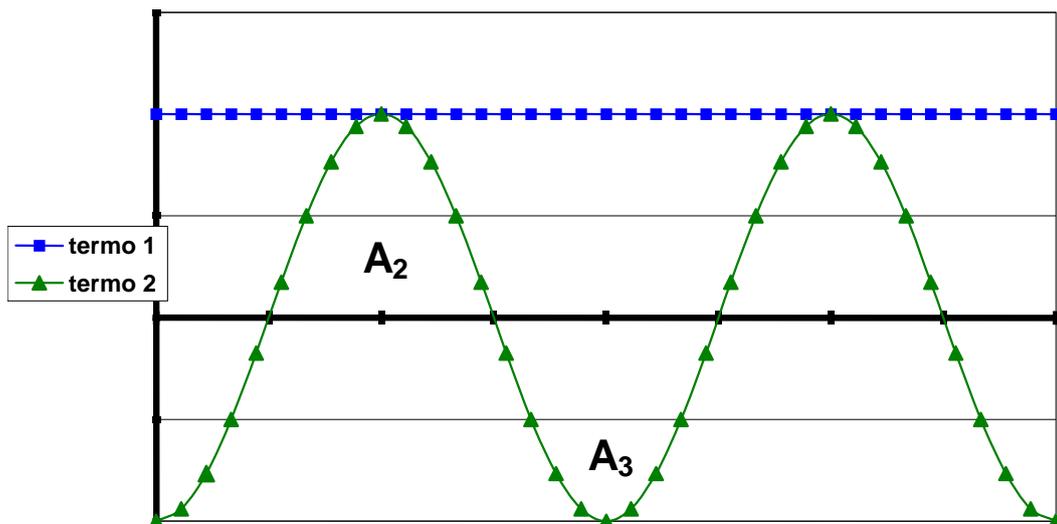


Figura 7.2.2 – Comportamento do termo variável de $p(t)$.

$$p_2(t) = -\frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + \phi)$$

$$P_2 = \frac{A_3 - A_2}{T}$$

como $|A_2| = |A_3|$. Portanto:

$$P_2 = 0$$

O **valor médio desse termo é zero** pois a área positiva é igual à área negativa. Este termo caracteriza transferência de energia para a carga e devolução de energia pela carga à fonte, não caracterizando dissipação (consumo) de energia.

c) **Valor médio total de $p(t)$** : a potência média total será dada pela soma das duas parcelas:

$P = P_1 + P_2$ Como $P_2 = 0$, então a potência média total será dada apenas pelo primeiro termo P_1 :

$$P = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cos \phi$$

A unidade da potência média é o Watt (W).

Para uma senóide, $V_p = \sqrt{2} \cdot V_{ef}$ e $I_p = \sqrt{2} \cdot I_{ef}$. Substituindo na equação da potência média, temos:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot V_{ef} \cdot \sqrt{2} \cdot I_{ef} \cdot \cos \phi$$

$$P = \frac{\sqrt{4}}{2} \cdot V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos \phi$$

Assim, a potência média pode ser dada em função dos valores eficazes:

$$P = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos \phi$$

A **potência média** também é conhecida como **Potência Ativa, Potência Efetiva, Potência Real ou Potência Útil**. É a potência que realmente produz trabalho elétrico. Nos motores, por exemplo, é a parcela da potência absorvida da fonte que realmente é transferida para o eixo do motor sob forma de potência mecânica.

7.3. ESTUDO DA POTÊNCIA NO RESISTOR, NO INDUTOR E NO CAPACITOR.

Para o estudo da potência nos elementos passivos (resistor, capacitor e indutor), consideremos o circuito da figura 7.3.1:

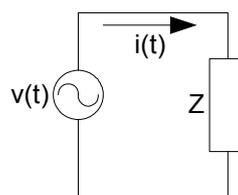


Figura 7.3.1 – Fonte de tensão alternada senoidal aplicada a uma impedância Z .

7.3.1. Potência no Resistor

Considerando que a impedância Z no circuito da figura 7.3.1 seja somente um resistor ideal R , podemos afirmar que a **corrente está em fase com a tensão**. Então temos:

$$Z = R$$

$$\theta_V = \theta_I$$

$$\phi = \theta_V - \theta_I = 0$$

$$\theta_I = -\phi$$

$$\cos \phi = \cos(0) = 1$$

Substituindo na equação de tensão e corrente instantâneas,

$$v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

$$i(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_I) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \phi) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - 0)$$

A potência instantânea é dada pelo produto da tensão e da corrente instantâneas no resistor:

$$p_R(t) = v(t) \cdot i(t)$$

Substituindo os valores na equação geral da potência instantânea, temos:

$$p_R(t) = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos 0 - \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t - 0)$$

A **potência instantânea no resistor** alimentado em corrente alternada pode ser dada por:

$$p_R(t) = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p - \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t)$$

Esta é a equação que descreve o comportamento da potência em função do tempo para uma resistência pura submetida a uma corrente alternada senoidal. Ela descreve, como indica a figura 7.3.2, uma **variação senoidal** com o tempo, onde a **potência é sempre positiva**, pois, num mesmo instante de tempo, a tensão e a corrente são ambas positivas ou negativas, variando de zero ao valor máximo $V_p I_p$, com uma frequência que é o **dobro da frequência do circuito**. Assim, vê-se que um resistor comporta-se sempre como um **receptor**, pois sua **potência é sempre positiva**, ou seja, está sempre consumindo potência.

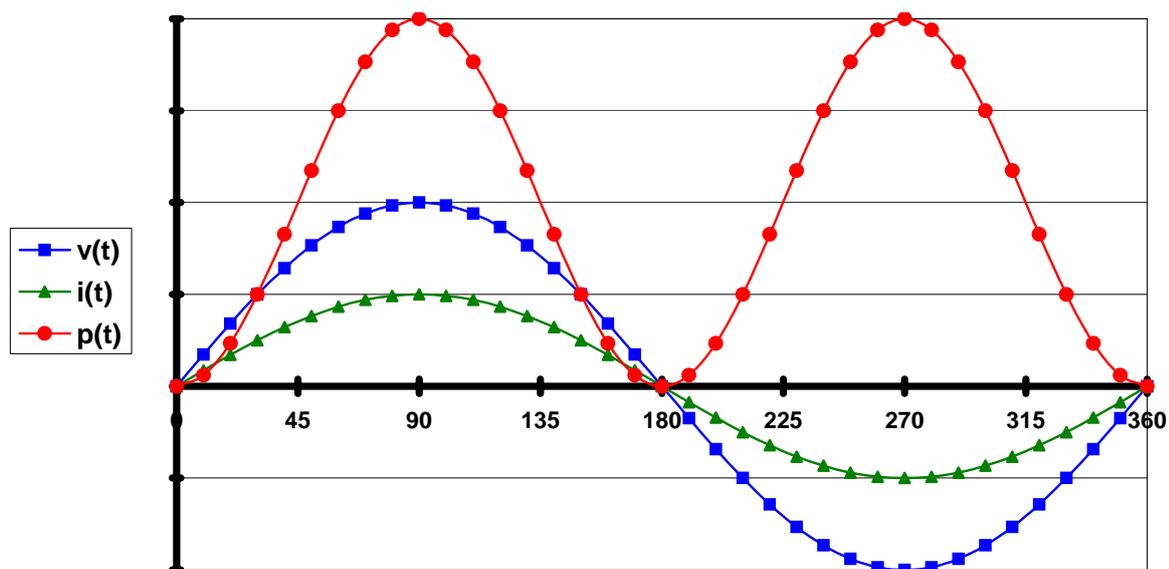


Figura 7.3.2 – tensão, corrente e potência instantâneas num resistor.

Como vimos, a equação da potência instantânea é formada por dois termos: um constante e outro variável no tempo. Em termos gráficos, o termo constante é uma reta e o termo variável é uma curva senoidal com o dobro da frequência ω , como mostra a figura 7.3.3. A composição de ambos os termos é a potência instantânea no resistor.

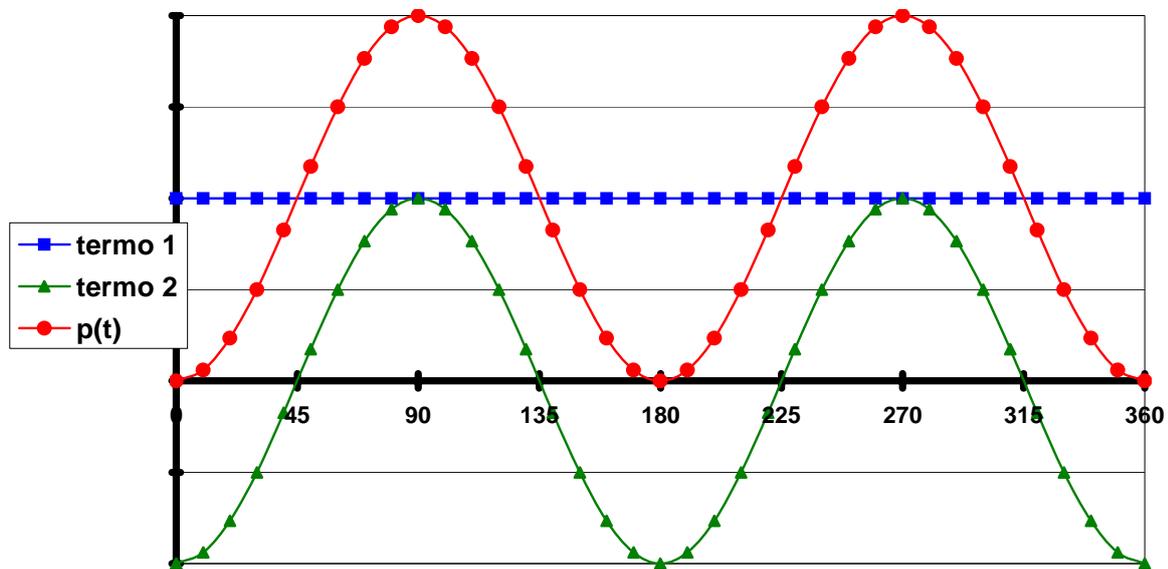


Figura 7.3.3 – composição dos termos da potência instantânea no resistor.

Da equação e do gráfico podemos verificar que a potência de pico (amplitude da forma de onda) será dada por:

$$P_p = V_p \cdot I_p \Rightarrow \text{potência de pico num circuito resistivo em CA}$$

Em um ciclo completo o valor médio do termo 2 será zero pois é cossenoidal. Então, o valor médio da potência será dado apenas pelo termo 1:

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p = \frac{P_p}{2}$$

desenvolvendo:

$$P_R = \frac{1}{2} V_p \cdot I_p = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_p}{\sqrt{2}} = V_{\text{ef}} \cdot I_{\text{ef}}$$

A **potência média num circuito resistivo em CA** é dada por:

$$P_R = V_{\text{ef}} \cdot I_{\text{ef}}$$

ou:

$$P_R = \frac{V_{\text{ef}}^2}{R}$$

ou ainda:

$$P_R = R \cdot I_{\text{ef}}^2$$

7.3.2 - Potência no Indutor Ideal

Considerando que a impedância Z no circuito da figura 7.3.1 seja um **indutor L ideal** (resistência do indutor nula), podemos concluir que **a corrente está atrasada de 90° da tensão** nos seus terminais. Tomando a corrente como referência:

$$Z = X_L$$

$$\theta_I = 0^\circ$$

$$\theta_V = +90^\circ$$

$$\phi = \theta_V - \theta_I = +90 - 0 = +90^\circ$$

$$\theta_V = +\phi$$

$$\cos \phi = \cos(90^\circ) = 0$$

Substituindo na equação de tensão e corrente instantâneas,

$$v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_V) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + 90^\circ)$$

$$i(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_I) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + 0) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

A potência instantânea é dada pelo produto da tensão e da corrente instantâneas no indutor:

$$p_L(t) = v(t) \cdot i(t)$$

Substituindo os valores na equação geral da potência instantânea, temos:

$$p_L(t) = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + 90^\circ)$$

mas $\cos(90^\circ) = 0$,

$$p_L(t) = -\frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + 90^\circ)$$

como $\cos(\alpha + 90^\circ) = -\text{sen}(\alpha)$:

$$p_L(t) = +\frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t)$$

Como $V_p = \sqrt{2} \cdot V_{ef}$ e $I_p = \sqrt{2} \cdot I_{ef}$, temos:

$$p_L(t) = +\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot V_{ef} \cdot \sqrt{2} \cdot I_{ef} \cdot \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t)$$

A **potência instantânea no indutor** é dada por:

$$p_L(t) = +V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t)$$

A potência instantânea num indutor é uma **senoide positiva** com o dobro da frequência (2ω), cujo valor de pico é dado pelo produto da tensão eficaz pela corrente eficaz no indutor, como mostra a figura 7.3.4.

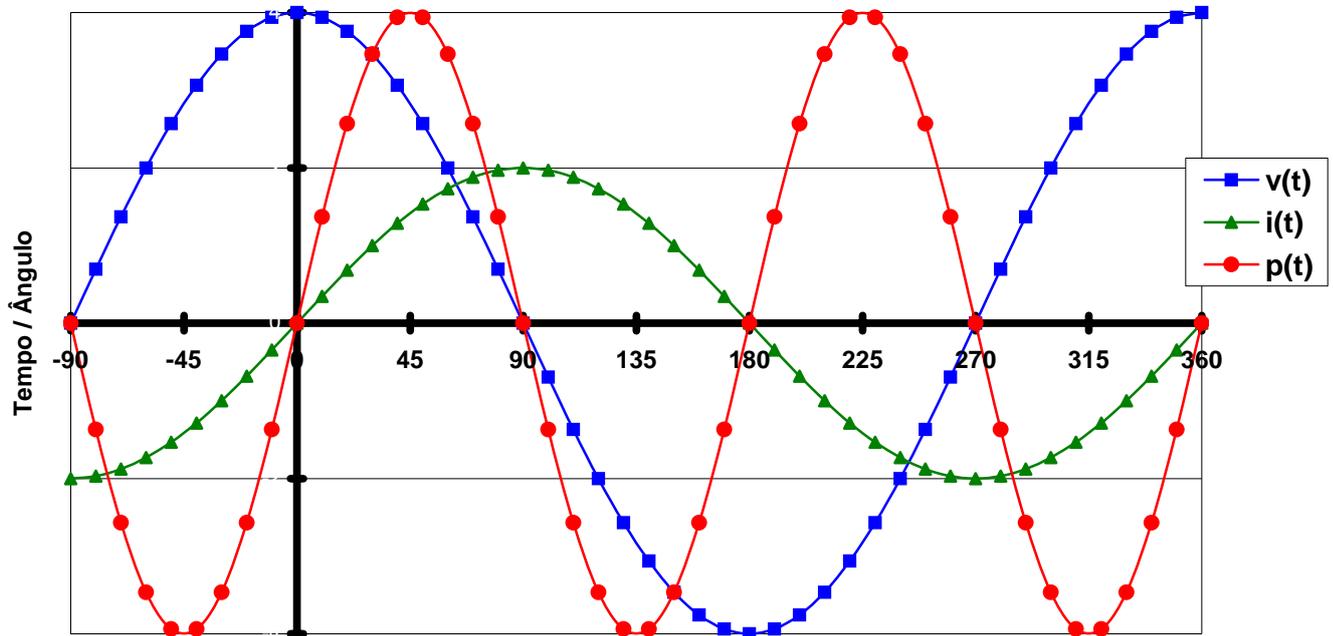


Figura 7.3.4 – curvas de tensão, corrente e potência instantâneas num indutor ideal.

A figura 7.3.5 apresenta os termos da equação geral para a potência instantânea no indutor.

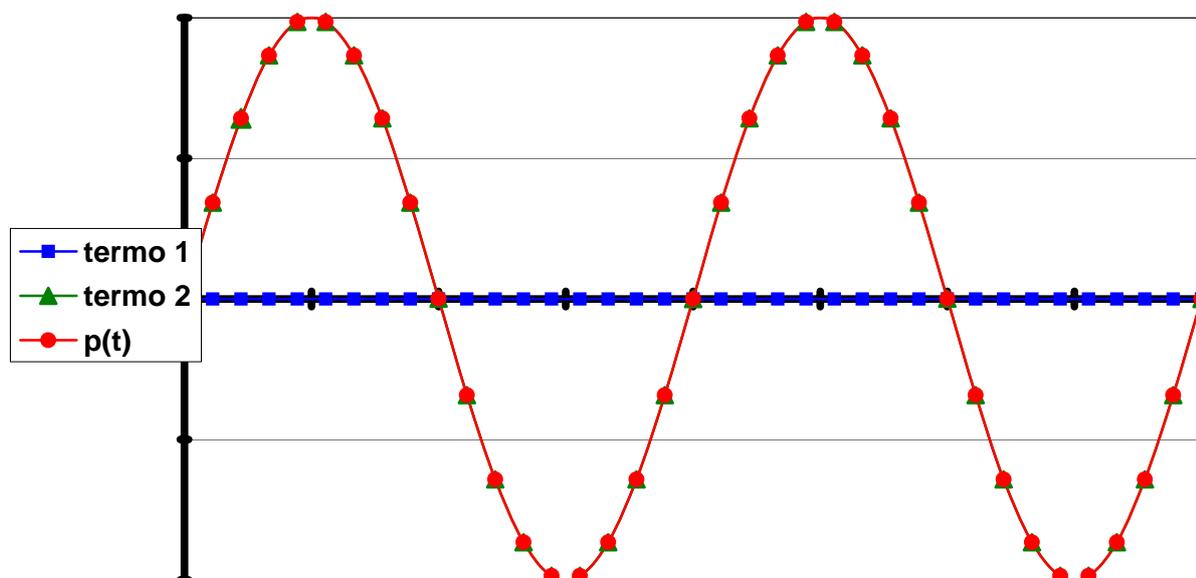


Figura 7.3.5 – A potência no indutor é formada apenas pelo segundo termo da equação geral.

A potência pode ser positiva (energia absorvida pelo indutor) ou negativa (energia devolvida pelo indutor para a fonte), variando de $-\frac{V_p \cdot I_p}{2}$ a $+\frac{V_p \cdot I_p}{2}$, com frequência de 2ω .

Potência média (Potência Ativa) no Indutor Ideal:

Como o semiciclo positivo é igual ao semiciclo negativo, a potência absorvida na magnetização do indutor ideal é igual à potência devolvida na desmagnetização. O fluxo líquido de potência no indutor ideal é zero a cada ciclo completo e não há perda de energia no processo.

Portanto:

A potência média no indutor ideal é nula pois não dissipa potência.

A figura 9 apresenta as curvas de tensão, corrente e potência instantâneas num indutor ideal. Podemos concluir que em um **circuito puramente indutivo ideal** (sem resistência), num ciclo completo, o **valor médio da potência (Potência Ativa) é zero**, ou seja, em um circuito puramente indutivo, **não há dissipação de energia**.

Isto ocorre porque na parte do ciclo onde potência é positiva a energia está sendo armazenada no campo magnético do indutor, enquanto na parte do ciclo onde a potência é negativa o campo magnético está descarregando sua energia no circuito. Esta seqüência ocorre duas vezes a cada ciclo da tensão, a fonte apenas troca energia com o indutor, não havendo dissipação de energia.

A **potência média ou potência ativa num indutor** é dada por:

$$P_L = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos \phi = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$P_L = 0$$

Isso indica que não há transformação de energia e que o indutor ideal devolve integralmente à fonte a energia que recebeu e, portanto, não há produção de trabalho elétrico. A quantidade de energia envolvida neste processo é dita **energia reativa indutiva** e a ela está associado um custo de produção e fornecimento, sem que seja aproveitada para a realização de trabalho elétrico efetivo pelo indutor.

Potência Reativa no Indutor Ideal:

O valor de pico da curva de potência instantânea no indutor ideal, dado pelo produto da tensão instantânea pela corrente instantânea, e apresentado na figura 9 é definido como **Potência Reativa Indutiva (Q_L)** de um indutor. O símbolo Q provém da relação de quadratura (90°) entre as potências ativa (P) e reativa (Q), como será estudado. A unidade de potência reativa é o **Volt-Ampère Reativo (VAr)**. Assim:

$$Q_L = V_{efL} \cdot I_{efL}$$

como $|X_L| = \frac{V_{efL}}{I_{efL}}$, obtemos:

$$Q_L = |X_L| \cdot I_{\text{ef}L}^2$$

$$Q_L = \frac{V_{\text{ef}L}^2}{|X_L|}$$

Energia no Indutor Ideal:

A energia absorvida em um ciclo de carga é devolvida no ciclo de descarga. Essa quantidade de energia trocada no circuito do indutor ideal é dada por:

$$E_{nL} = \frac{L \cdot I_p^2}{2} = L \cdot I_{\text{ef}L}^2$$

Unidade: Joules (J).

7.3.3. Potência no Capacitor Ideal

Considerando que a impedância Z no circuito da figura 7.3.1 seja um capacitor ideal (resistência do capacitor nula), podemos concluir que a **corrente está adiantada de 90° da tensão**. Tomando a corrente como referência, temos:

$$Z = X_C$$

$$\theta_I = 0^\circ$$

$$\theta_V = -90^\circ$$

$$\phi = \theta_V - \theta_I = -90 - 0 = -90^\circ$$

$$\theta_V = -\phi$$

$$\cos \phi = \cos(-90^\circ) = 0$$

Substituindo na equação de tensão e corrente instantâneas,

$$v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_V) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - 90^\circ)$$

$$i(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_I) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + 0) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

A potência instantânea é dada pelo produto da tensão e da corrente instantâneas no capacitor:

$$p_C(t) = v(t) \cdot i(t)$$

Substituindo os valores na equação geral da potência instantânea, temos:

$$p_C(t) = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos(-90^\circ) - \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + 90^\circ)$$

mas $\cos(90^\circ) = 0$,

$$p_C(t) = -\frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + 90^\circ)$$

como $\cos(\alpha + 90^\circ) = +\text{sen}(\alpha)$:

$$p_C(t) = -\frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t)$$

Como $V_p = \sqrt{2} \cdot V_{ef}$ e $I_p = \sqrt{2} \cdot I_{ef}$, temos:

$$p_C(t) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot V_{ef} \cdot \sqrt{2} \cdot I_{ef} \cdot \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t)$$

A **potência instantânea no capacitor ideal** é dada por:

$$p_C(t) = +V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t)$$

A potência instantânea num capacitor é uma **senoide negativa** com o dobro da frequência (2ω), cujo valor de pico é dado pelo produto da tensão eficaz pela corrente eficaz no indutor, como mostra a figura 7.3.6.

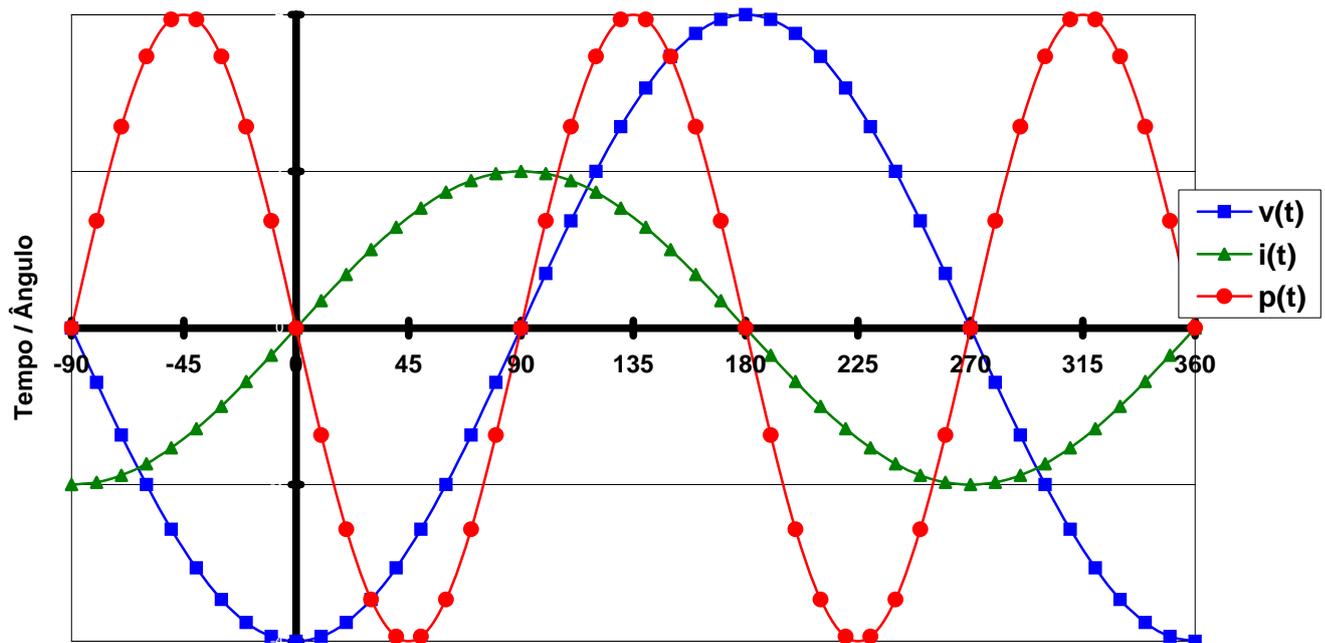


Figura 7.3.6 – curvas de tensão, corrente e potência instantâneas num capacitor ideal.

A figura 7.3.7 apresenta os termos da equação geral para a potência instantânea no capacitor.

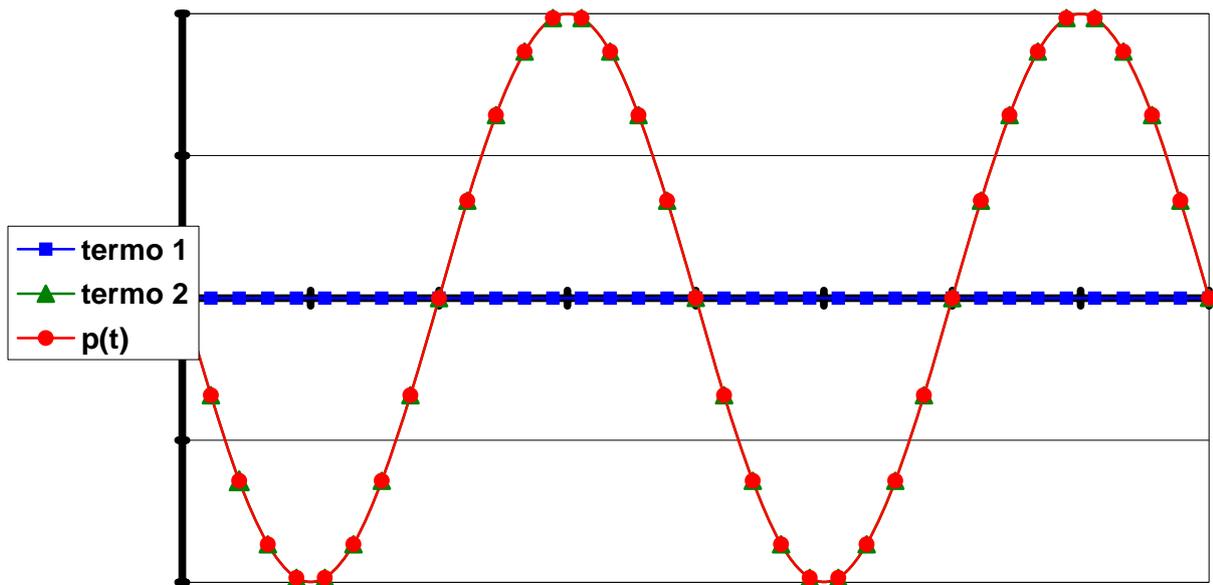


Figura 7.3.7 – A potência no capacitor é formada apenas pelo segundo termo da equação geral.

A potência pode ser positiva (energia absorvida pelo capacitor) ou negativa (energia retornando do capacitor para a fonte), variando de $-\frac{V_p \cdot I_p}{2}$ até $+\frac{V_p \cdot I_p}{2}$, com frequência de 2ω .

Potência média (Potência Ativa):

Como o semiciclo positivo é igual ao semiciclo negativo, a potência absorvida no carregamento do capacitor é igual à potência devolvida no descarregamento. O fluxo líquido de potência no capacitor ideal é zero a cada ciclo completo. Portanto:

A potência média no capacitor ideal é nula pois não dissipa potência.

A figura 7.3.6 apresenta as curvas de tensão, corrente e potência instantâneas num capacitor ideal. Em um **circuito capacitivo ideal** (sem resistência), num ciclo completo o **valor médio da potência (potência ativa) será zero**, ou seja, não há consumo de potência, como mostra a figura 7.3.7.

Isto ocorre porque enquanto a potência é positiva o capacitor está armazenando energia em seu campo elétrico, enquanto na parte do ciclo onde a potência é negativa o capacitor está entregando essa energia para o circuito. Esta seqüência se repete duas vezes a cada ciclo da tensão, a fonte apenas troca energia com o capacitor, não havendo dissipação de energia.

A **potência média ou potência ativa num capacitor** é dada por:

$$P_C = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos \phi = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos(-90^\circ) = 0$$

$$P_C = 0$$

Potência Reativa no Capacitor Ideal:

O valor de pico da curva de potência instantânea no capacitor ideal, dado pelo produto da tensão instantânea pela corrente instantânea, e apresentado na figura 7.3.6 é definido como **Potência Reativa Capacitiva (Q_C)** de um indutor. A unidade de potência reativa é o Volt-Ampère Reativo (VAR). Assim:

$$Q_C = V_{\text{efC}} \cdot I_{\text{efC}}$$

como $|X_C| = \frac{V_{\text{efC}}}{I_{\text{efC}}}$, obtemos:

$$Q_C = |X_C| \cdot I_{\text{efC}}^2$$

$$Q_C = \frac{V_{\text{efC}}^2}{|X_C|}$$

Energia no Capacitor Ideal:

A energia absorvida em um ciclo de carga é devolvida no ciclo de descarga. Essa quantidade de energia trocada no circuito do capacitor ideal é dada por:

$$E_{n_C} = \frac{C \cdot V_p^2}{2} = C \cdot V_{\text{efC}}^2$$

Unidade: Joules (J).

7.3.4. Potencia na Impedância de um circuito misto

Considerando que a impedância Z do circuito da figura 7.3.1 seja proveniente de uma composição de elementos passivos RLC. Pelos estudos anteriores podemos concluir que a **corrente estará defasada de um ângulo ϕ da tensão**. Esse ângulo dependerá do teor da carga. Assim:

$$Z = R \pm jX = |Z| \angle \phi$$

$$v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_V)$$

$$i(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_I)$$

$$\phi = \theta_V - \theta_I$$

$$-90^\circ \leq \phi \leq +90^\circ$$

Sabemos que a potência instantânea numa impedância genérica Z pode ser dada pelo produto:

$$p_Z(t) = v(t) \cdot i(t)$$

$$p_Z(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_V) \cdot I_p \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_I)$$

A figura 7.3.8 apresenta os gráficos de tensão, corrente e potência instantâneas para um ângulo $\phi = +45^\circ$ de defasagem entre tensão e corrente, o que configura um circuito misto com teor indutivo. Podemos verificar que a forma de onda da potência apresenta valores positivos e negativos

ao longo de um período. Isso significa que há absorção e devolução de energia (carga e descarga), o que representa a presença de elementos reativos no circuito (indutores e/ou capacitores). Há, portanto, potência reativa no circuito. Porém, a forma de onda da potência instantânea possui uma parcela positiva maior que a negativa (não é simétrica ao eixo x). Isso significa que também há uma potência média ativa, o que representa a presença de elementos resistivos (resistores) dissipando potência e consumindo energia no circuito. Para ilustrar melhor este caso, a figura 7.3.9 apresenta os gráficos de tensão, corrente e potência instantâneas para um ângulo $\phi = -45^\circ$ de defasagem entre tensão e corrente, o que configura um circuito misto com teor capacitivo. Podemos perceber a existência de potência reativa e ativa também nesse caso.

Numa carga mista há potência ativa e potência reativa

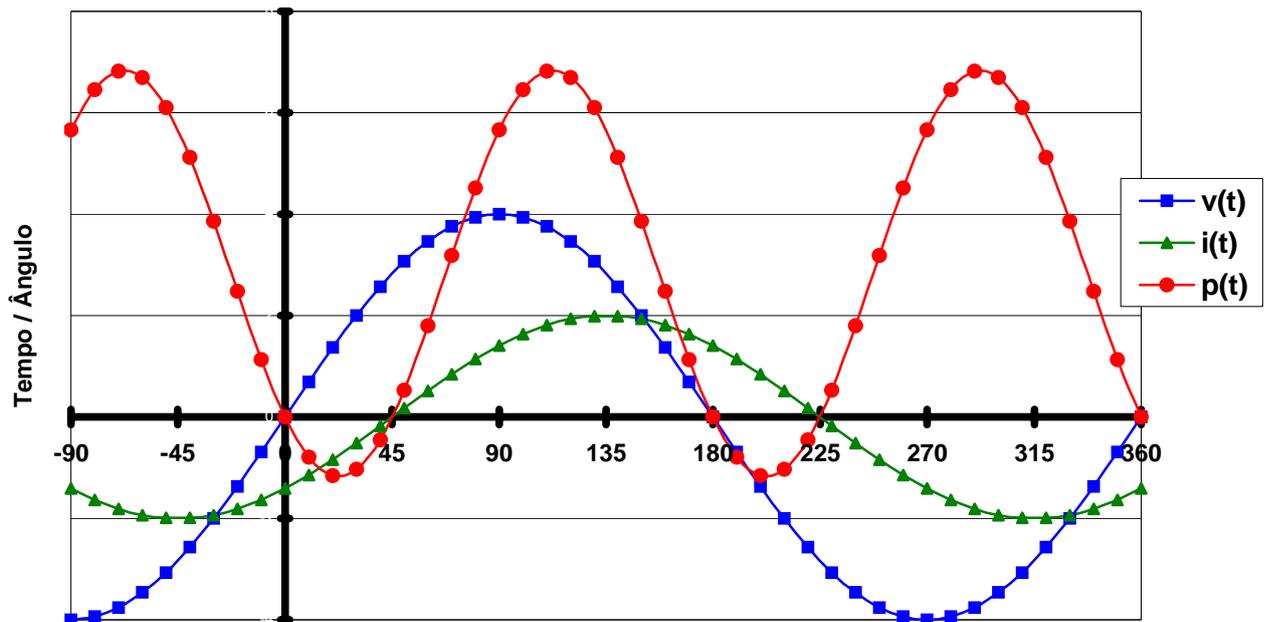


Figura 7.3.8 – Tensão, corrente e potência instantâneas numa carga mista indutiva, $\phi = +45^\circ$.

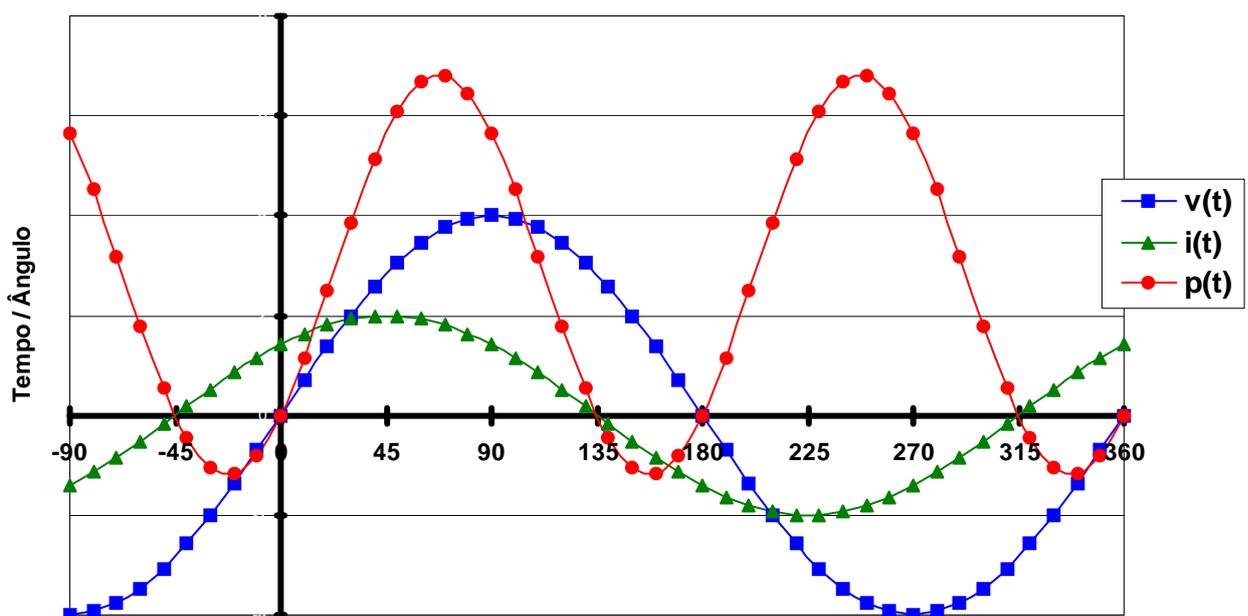


Figura 7.3.9 – Tensão, corrente e potência instantâneas numa carga mista capacitiva, $\phi = -45^\circ$.

Como apresentado anteriormente, o desenvolvimento do produto das equações de tensão e corrente instantâneas, utilizando identidades trigonométricas, leva-nos à **equação geral ampliada da potência instantânea**:

$$p(t) = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \cos \phi \cdot [1 - \cos(2 \cdot \omega \cdot t)] - \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \sin \phi \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$$

Como $V_p = \sqrt{2} \cdot V_{ef}$ e $I_p = \sqrt{2} \cdot I_{ef}$, podemos obter a equação geral ampliada da potência instantânea em função dos valores de tensão e corrente eficazes:

$$p(t) = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos \phi \cdot [1 - \cos(2 \cdot \omega \cdot t)] - V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \sin \phi \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$$

Analisando a equação:

- Circuito Resistivo Puro ($\phi = 0^\circ$): o segundo termo da equação é nulo. Só há potência média ativa.
- Circuito Indutivo Puro ($\phi = +90^\circ$): o primeiro termo da equação é nulo. Só há potência reativa.
- Circuito Capacitivo Puro ($\phi = -90^\circ$): o primeiro termo da equação é nulo. Só há potência reativa.
- Circuito Misto ($-90^\circ \leq \phi \leq +90^\circ$): os dois termos estão presentes. Há potência ativa e reativa.

Podemos concluir, portanto:

O primeiro termo da equação ampliada da potência instantânea fornece a potência média ativa e o segundo termo fornece a potência reativa de uma impedância genérica Z.

7.4. POTÊNCIA APARENTE E TRIÂNGULO DE POTÊNCIAS

Aparentemente, a potência fornecida à carga Z do circuito da figura 7.3.1 seria determinada pelo simples produto da tensão eficaz pela corrente eficaz, independentemente da composição da carga Z. Porém o teor da carga (resistivo, indutivo, capacitivo ou misto) tem grande influência na potência dissipada. Definimos **Potência Aparente S** como o simples produto da tensão eficaz pela corrente eficaz numa impedância genérica Z.

Potência Aparente (S) é definida como o produto da tensão eficaz pela corrente eficaz

Embora o produto da tensão pela corrente não represente a potência efetivamente dissipada em alguns casos, a **Potência Aparente (S)** é uma especificação importante. Sua unidade, dada pelo produto da tensão pela corrente, é o **Volt-Ampère (VA)**, para diferenciar da Potência Média (Ativa) dada em Watts (W).

$$S = V_{ef} \cdot I_{ef}$$

Geralmente os equipamentos elétricos são especificados em potência aparente (VA ou kVA) e não em Watts (W). Sabendo-se a especificação de potência aparente e a de tensão eficaz, pode-se determinar a especificação de corrente eficaz máxima.

Exemplo 7.4.1:

Um transformador com entrada de $220V_{ef}$ e saída de $110V_{ef}$ têm potência aparente nominal de 500VA. Desconsiderando as perdas, qual a máxima corrente admissível no primário e no secundário?

Solução: no primário a tensão é de 220V. Para a potência de 500VA a corrente eficaz é dada por:

$$I_{ef1} = \frac{S}{V_{ef1}} = \frac{500}{220} = 2,27A$$

No secundário a tensão é de 110V. Para a potência de 500VA a corrente eficaz é dada por:

$$I_{ef2} = \frac{S}{V_{ef2}} = \frac{500}{110} = 4,54A$$

Potência Ativa (P) é a Potência Média e corresponde à potência efetivamente consumida (dissipada) no circuito (somente nos elementos resistivos dos circuitos). Já estudamos que:

$$P = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos \phi$$

Como definimos $S = V_{ef} \cdot I_{ef}$, então:

$$P = S \cdot \cos \phi$$

A **Potência Reativa (Q)** está associada aos elementos indutivos e capacitivos. Ela circula pelos condutores sendo absorvida e devolvida sem produzir trabalho elétrico. É definida como o valor de pico da potência instantânea nos elementos reativos e corresponde ao valor de pico do segundo termo da equação geral ampliada da potência instantânea:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot V_p \cdot I_p \cdot \sin \phi \quad \text{ou} \quad Q = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \sin \phi$$

Como definimos $S = V_{ef} \cdot I_{ef}$, então:

$$Q = S \cdot \sin \phi$$

A potência reativa está associada ao fator $\sin(\phi)$ que aparece no segundo termo da equação geral ampliada da potência instantânea e à potência aparente S

Observação: Embora P, Q e S sejam grandezas de mesma natureza, utilizam-se unidades distintas para diferenciá-las mas dimensionalmente equivalentes:

- **Potência Aparente (S)** \Rightarrow VA (Volt-Ampère)
- **Potência Ativa (P)** \Rightarrow W (Watt)
- **Potência reativa (Q)** \Rightarrow VAr (Volt-Ampère reativo)

7.4.1. Triângulo de Potências

Definimos a potência aparente S por:

$$S = V_{ef} \cdot I_{ef}$$

Sabemos que a potência ativa P é função do cosseno do ângulo de defasagem ($\cos\phi$) e da potência aparente S :

$$P = S \cdot \cos \phi$$

assim:

$$\cos \phi = \frac{P}{S}$$

Já a potência reativa Q é função do seno do ângulo de defasagem ($\sin\phi$) e da potência aparente S :

$$Q = S \cdot \sin\phi$$

assim:

$$\sin\phi = \frac{Q}{S}$$

Sabendo que a relação trigonométrica:

$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$$

$$\left(\frac{P}{S}\right)^2 + \left(\frac{Q}{S}\right)^2 = 1$$

$$\frac{P^2 + Q^2}{S^2} = 1$$

Encontramos a relação do Teorema de Pitágoras:

$S^2 = P^2 + Q^2$

Ou

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Isso configura um triângulo retângulo chamado de **Triângulo de Potências**, onde a hipotenusa é a potência aparente S , o cateto adjacente ao ângulo ϕ é a potência ativa P e o cateto oposto ao ângulo ϕ é a potência reativa Q , como mostra a figura 7.4.1. O posicionamento em quadratura (deslocamento de 90°) entre a potência ativa P e a potência reativa Q , justifica a simbologia utilizada. A potência reativa também é conhecida como Potência de Quadratura.

Num circuito misto composto por elementos capacitivos e indutivos, a potência reativa total é dada pela diferença entre a potência reativa indutiva Q_L e a potência reativa capacitiva Q_C :

$$Q_T = Q_L - Q_C$$

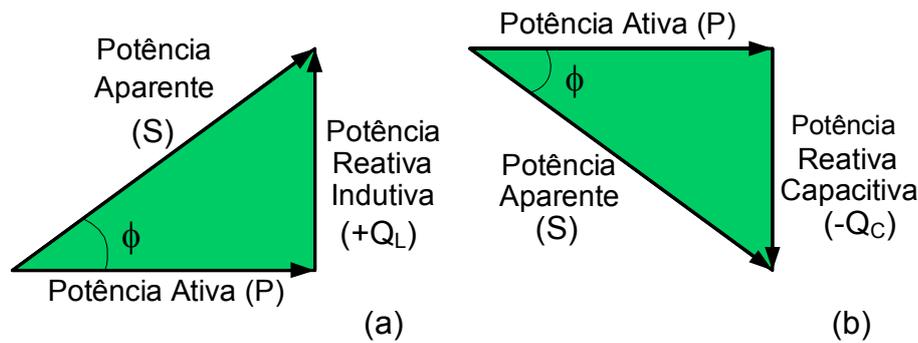


Figura 7.41 – Triângulo de Potências: (a) teor indutivo; (b) teor capacitivo.

7.5. FATOR DE POTÊNCIA E ENERGIA

O Fator de Potência FP é definido como a relação entre a potência ativa e a potência aparente:

$$FP = \frac{P}{S}$$

Do triângulo de potências da figura 15, podemos concluir que a equação acima é a relação de um cateto adjacente pela hipotenusa, ou seja, é o cosseno do ângulo ϕ :

$$FP = \cos \phi = \left(\frac{P}{S} \right)$$

Observações:

- O fator $\cos \phi$ é, conhecido como **fator de deslocamento**, e somente é igual ao Fator de Potência quando o sinal é **puramente senoidal**.
- O fator de potência pode ser determinado diretamente da fase (ϕ) da Impedância Equivalente;
- O fator de potência não-unitário deve ser indicado como indutivo (em atraso) ou capacitivo (em avanço).
- O fator de potência é uma medida do aproveitamento da energia fornecida pela fonte à carga:
 - carga puramente resistiva ($\phi = 0^\circ$) $\Rightarrow \cos \phi = 1$ (FP = 1)
 - carga puramente indutiva ($\phi = +90^\circ$) $\Rightarrow \cos \phi = 0$ (FP = 0)
 - carga puramente capacitiva ($\phi = -90^\circ$) $\Rightarrow \cos \phi = 0$ (FP = 0)
 - carga mista ($-90^\circ < \phi < +90^\circ$) $\Rightarrow 0 < \phi < 1$ ($0 < FP < 1$)

Embora nos elementos reativos (capacitor e indutor) a potência média seja nula, o estudo da potência reativa tem grande importância. Tanto para o capacitor como para o indutor, energia deve ser suprida para o carregamento durante o semiciclo positivo da curva de potência. Esta energia é devolvida durante o semiciclo negativo. Porém, para o suprimento da energia, uma outra forma de energia primária foi utilizada na geração, como por exemplo queima de carvão, água de um reservatório, reação nuclear, queima de óleo etc. Quando a energia é devolvida pelos elementos reativos, ela não retorna à sua forma original. Além disso, a energia sendo fornecida e devolvida está ocupando uma capacidade dos sistemas elétricos. Isso tudo tem custos para a companhia geradora e fornecedora de energia e estes custos são repassados ao consumidor. Muitos consumidores que utilizam muitos equipamentos reativos (motores, reatores de lâmpadas, fornos de indução para fusão de metais, fontes de computadores, etc.) são obrigados a pagar por essa demanda de energia

reativa além da demanda de energia ativa dissipada. Nestes casos a medição do consumo de energia é feito em VA (aparente) pois é uma medição mais sensível à demanda de energia reativa.

Portanto:

Uma instalação elétrica é mais eficiente quanto mais próximo de 1 for o seu fator de potência.

A legislação brasileira exige um fator de potência mínimo de 0,92 para as instalações elétricas industriais e comerciais. Se este fator de potência mínimo não for obedecido a concessionária de energia automaticamente aplica severas taxas ao consumidor.

Para que o fator de potência de uma unidade consumidora esteja de acordo com as exigências, deve ser feita a chamada **correção do fator de potência**. A correção do fator de potência é feita através da instalação de capacitores em paralelo com as cargas indutivas para compensar a demanda de potência reativa indutiva. Os capacitores absorvem a energia dos indutores num ciclo e devolvendo-a no ciclo seguinte, liberando a necessidade do fornecimento pelo sistema da concessionária.

7.5.1. Energia Elétrica

Sabemos que a energia elétrica pode ser determinada pelo produto da potência pelo intervalo de tempo. Portanto podemos concluir que há três tipos de energia em corrente alternada:

- **Energia Ativa:** é a energia realmente consumida e dissipada pelos elementos resistivos de um circuito e é dada pelo produto da potência ativa pelo tempo e sua unidade é o **Wh ou kWh**.

$$E_{n_p} = P \cdot t$$

- **Energia Reativa:** é energia absorvida e devolvida pelos elementos reativos de carga e descarga (capacitores e indutores). É dada pelo produto da potência reativa e o intervalo de tempo e sua unidade é o **VARh ou kVARh**.

$$E_{n_Q} = Q \cdot t$$

- **Energia Aparente:** é a energia aparente total numa impedância mista. É dada pelo produto da potência aparente e o intervalo de tempo e sua unidade é o **VAh ou kVAh**.

$$E_{n_S} = S \cdot t$$

No Brasil, atualmente, as unidades consumidoras residenciais têm apenas a energia ativa medida e tarifada. Nos consumidores industriais e comerciais de grande porte há várias classes tarifárias. Em geral, a energia ativa e a energia aparente são medidas. A energia ativa e a demanda de potência são tarifadas. O fator de potência deve ter um valor mínimo de 0,92, e estará sujeito a multas tarifárias caso esse valor mínimo seja ultrapassado.

7.6 - NOTAÇÃO COMPLEXA DA POTÊNCIA

Como as potências se relacionam de forma trigonométrica, podemos imaginar o triângulo de potências da figura 7.4.1 no plano dos números complexos, como mostra a figura 7.6.1.

A potência aparente S pode ser dada pela soma vetorial:

$$\vec{S} = \vec{P} + \vec{Q}$$

No plano dos números complexos essa soma vetorial é representada pela soma de um número real com um número imaginário em quadratura (a 90°). Assim, podemos definir a **potência complexa na forma retangular** como:

$$\dot{S} = P \pm jQ$$

Onde:

P = potência ativa (W)

Q = potência reativa (Var)

Q > 0 : teor indutivo

Q < 0 : teor capacitivo

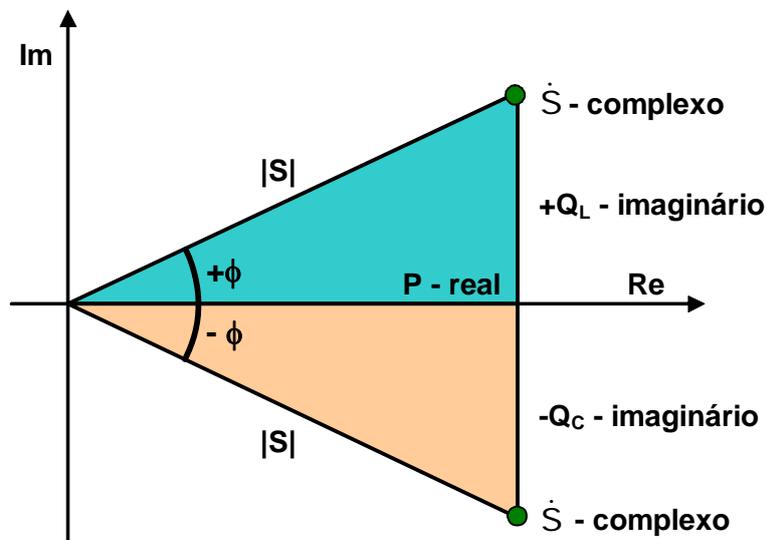


Figura 7.6.1 – Potência Complexa

Das relações trigonométricas:

$$\cos \phi = \frac{P}{S}$$

$$P = S \cdot \cos \phi$$

$$\text{sen} \phi = \frac{Q}{S}$$

$$Q = S \cdot \text{sen} \phi$$

Como $\dot{S} = P + jQ$, então:

$$\dot{S} = |S| \cdot \cos \phi \pm j \cdot |S| \cdot \text{sen} \phi$$

A **potência aparente na forma polar** pode ser dada por:

$$\dot{S} = |S| \angle \phi$$

onde:

$|S|$ - módulo da potência aparente S (VA)

ϕ = ângulo do fator de potência (ângulo da defasagem entre tensão e corrente)

No domínio fasorial, a potência aparente complexa pode ser dada pelo produto do fasor tensão pelo **conjugado** do fasor corrente.

$$\dot{S} = \dot{V} \cdot \dot{I}^*$$

Obsevação: O ângulo ϕ da impedância é o mesmo ângulo da defasagem entre a tensão e a corrente e também é o mesmo ângulo da potência complexa.

7.7. RELAÇÕES ENTRE P E Q E OS ELEMENTOS PASSIVOS R, L E C.

A tabela 7.7.1 apresenta as relações entre as potências ativa P e reativa Q nos elementos passivos dos circuitos.

Tabela 7.7.1

Potência Ativa no Resistor R	Potência Reativa no Capacitor C	Potência Reativa no Indutor L	Potência numa Impedância Mista Z
$P_R = V_{efR} \cdot I_{efR}$ $P_R = R \cdot I_{efR}^2$ $P_R = \frac{V_{efR}^2}{R}$	$Q_C = V_{efC} \cdot I_{efC}$ $Q_C = X_C \cdot I_{efC}^2$ $Q_C = \frac{V_{efC}^2}{X_C}$	$Q_L = V_{efL} \cdot I_{efL}$ $Q_L = X_L \cdot I_{efL}^2$ $Q_L = \frac{V_{efL}^2}{X_L}$	$P_Z = S \cdot \cos \phi$ $Q_Z = S \cdot \sin \phi$ $S = V_{ef} \cdot I_{ef}$ $\dot{S} = S \angle \phi = P + jQ$ $\dot{S} = \dot{V} \cdot \dot{I}^*$

Para se fazer uma análise das potências num circuito elétrico, devemos usar o seguinte procedimento (sugerido em Boylestad, 2003):

1. Encontre a potência ativa e a potência reativa para cada ramo i do circuito;
2. A potência ativa total do circuito é dada pela soma das potências ativas de cada ramo;

$$P_T = \sum_i P_i$$

3. A potência reativa total é dada pela diferença entre a soma das potências reativas indutivas e a soma das potências reativas capacitivas;

$$Q_T = \sum_i Q_{Li} - \sum_i Q_{Ci}$$

4. A potência aparente total é a hipotenusa do triângulo, dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$S_T = \sqrt{(P_T)^2 + (Q_T)^2}$$

5. O fator de potência é dado por:

$$FP = \frac{P}{S}$$

Observações:

- A potência aparente deve ser determinada a partir das potências ativa e reativa totais e não o contrário.
- As potências em cada ramo independem da forma de associação (série ou paralelo) e podem ser somadas diretamente. Porém, dependem das tensões e correntes e estas da forma de associação.

Exemplo 7.7.1: Uma dada carga num circuito elétrico apresenta uma corrente eficaz de 10A, atrasada 45° da tensão aplicada de $v(t) = 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t)$. Determine:

- A impedância da carga;
- As potências aparente, ativa e reativa da carga;
- O triângulo de potências e o fator de potência do circuito.

A impedância equivalente para esta carga pode ser encontrada pela relação entre o fasor tensão e o fasor corrente. Como a corrente está atrasada o seu ângulo de fase é negativo. Assim:

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{20 \angle -45^\circ} = 11 \angle +45^\circ = 7,78 + j7,78 \Omega$$

Como o ângulo da impedância é positivo, esta carga tem teor indutivo, como era de se esperar, pois a corrente está atrasada da tensão.

Para calcularmos as potências temos:

$$S = V_{ef} \cdot I_{ef} = 220 \cdot 20 = 4400 \text{ VA}$$

$$P = S \cdot \cos \phi = 4400 \cdot \cos 45 = 3111,27 \text{ W}$$

$$Q = S \cdot \text{sen} \phi = 4400 \cdot \text{sen} 45 = 3111,27 \text{ VAR}$$

O fator de potência é dado por:

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{3111,27}{4400} = 0,71$$

O triângulo de potências resultante é apresentado na figura 7.7.1.

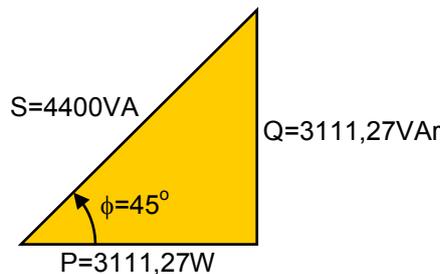


Figura 7.7.1 – Triângulo de potências para o exemplo 7.7.1.

Exemplo 7.7.2: Faça uma análise das potências para as cargas do circuito da figura 7.7.2 e determine o fator de potência e a corrente na fonte.

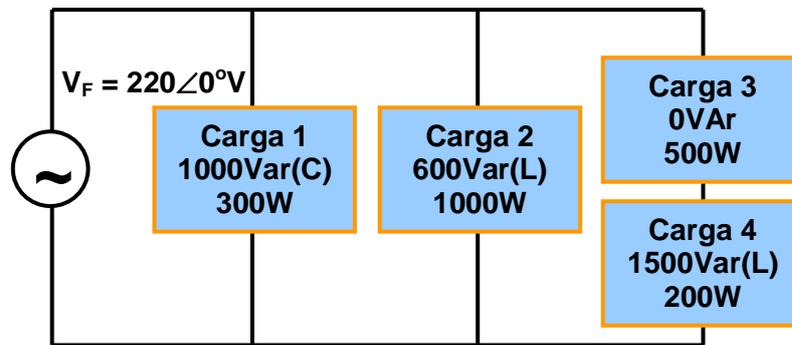


Figura 7.7.2 – cargas para o exemplo 7.1.

A potência ativa total deste circuito pode ser dada pela soma das potências ativas de cada carga:

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 300 + 1000 + 500 + 200$$

$$P_T = 2000W$$

Isso significa que todo este circuito elétrico está absorvendo e dissipando 2000W de potência da fonte na forma de calor (Efeito Joule) das parcelas resistivas das cargas.

A potência reativa total pode ser dada pela soma algébrica das potências reativas de cada carga:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = -1000 + 600 + 0 + 1500$$

$$Q_T = 1100VAr$$

Este resultado representa que a fonte está trocando uma potência de 1100VAr para a carga, ou seja, fornece e recebe esta potência, pois provém de elementos reativos de carga e descarga.

A potência aparente pode ser determinada por Pitágoras:

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{2000^2 + 1100^2}$$

$$S_T = 2282,5VA$$

Esta é a potência aparente para a fonte, dada pelo produto da tensão pela corrente.

O fator de potência é a relação entre a potência ativa e a aparente:

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{2000}{2282,5} = 0,88$$

Este fator de potência significa que 88% de toda a potência aparente é potência média ativa.

O fator de deslocamento $\cos\phi = FP$ e podemos obter o ângulo de defasagem ϕ :

$$\phi = \cos^{-1} \phi = \cos^{-1} 0,88 = 28,8^\circ$$

Como o ângulo de defasagem ϕ é positivo o teor do circuito é predominantemente indutivo. Isso significa que na fonte a corrente está atrasada de $28,8^\circ$ da tensão.

Sabendo que $S = V_{ef} \cdot I_{ef}$, então:

$$I_{ef} = \frac{S}{V_{ef}} = \frac{2282,5}{220} = 10,38A$$

O fasor corrente conjugado pode ser obtido pela potência aparente complexa:

$$\dot{i}^* = \frac{S}{\dot{V}} = \frac{2282,5 \angle 28,2^\circ}{220 \angle 0^\circ} = 10,38 \angle 28,2^\circ$$

Assim o fasor corrente resultante:

$$\dot{i} = 10,38 \angle -28,8^\circ \text{ A}$$

Exemplo 7.7.3 Para o circuito misto da figura 7.7.3, determine:

- a impedância equivalente e ângulo de defasagem entre tensão e corrente na fonte;
- o fasor corrente fornecido pela fonte;
- a potência aparente do circuito;
- o triângulo de potências;
- a potência de cada elemento.

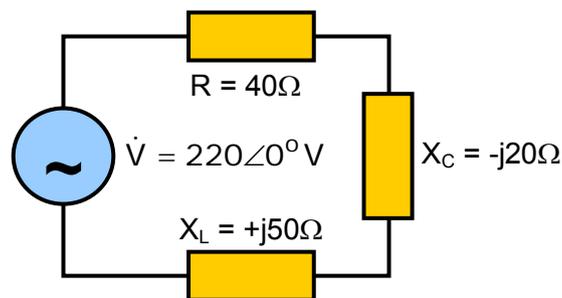


Figura 7.7.3 – circuito misto para o exemplo 7.2.

Como o circuito da figura 18 é um circuito CA série, obtemos a impedância equivalente pela soma das impedâncias de cada elemento:

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 = R + X_C + X_L = 40 + (-j20) + j50 = 40 + j30\Omega$$

Na forma polar o valor da impedância é: $Z_{eq} = 50 \angle 36,87^\circ \Omega$

O ângulo de defasagem ϕ é, portanto $+36,87^\circ$, o que representa um circuito indutivo para a fonte.

A corrente fornecida pela fonte no domínio fasorial é a relação entre a tensão e a impedância:

$$\dot{i}_F = \frac{\dot{V}_F}{Z_{eq}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{50 \angle 36,87^\circ} = 4,4 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

A potência aparente na fonte é o produto da tensão eficaz pela corrente eficaz:

$$S_F = V_{ef} \cdot I_{ef} = 220 \cdot 4,4 = 968 \text{ VA}$$

Para obtermos o triângulo de potências devemos determinar a potência ativa e reativa no circuito:

$$P_F = S_F \cdot \cos \phi = 968 \cdot \cos 36,87^\circ = 774,4 \text{ W}$$

$$Q_F = S_F \cdot \sin \phi = 968 \cdot \sin 36,87^\circ = 580,8 \text{ VAR}$$

Assim o triângulo de impedâncias resultante é apresentado na área hachurada da figura 19.

O circuito é série e, portanto, todos os elementos são percorridos pela mesma corrente.

No resistor só há potência ativa. Assim, a potência reativa é nula ($Q_R = 0\text{VAr}$) e a aparente é igual à potência ativa, dada por:

$$S_R = P_R = R \cdot I_{\text{ef}}^2 = 40 \cdot 4,4^2 = 774,4\text{W}$$

No capacitor a potência ativa (média) é nula ($P_C = 0\text{W}$) e a potência aparente é igual à potência reativa capacitiva que é negativa e pode ser determinada por:

$$S_C = Q_C = |X_C| \cdot I_{\text{ef}}^2 = 20 \cdot 4,4^2 = -387,2\text{VAr}$$

No indutor a potência ativa (média) também é nula ($P_L = 0\text{W}$) e a potência aparente é igual à potência reativa indutiva que é positiva e pode ser determinada por:

$$S_L = Q_L = |X_L| \cdot I_{\text{ef}}^2 = 50 \cdot 4,4^2 = 968\text{VAr}$$

A potência reativa líquida é dada pela diferença entre a potência reativa indutiva e a capacitiva:

$$Q_T = |Q_L| - |Q_C| = 968 - 387,2 = 580,8\text{VAr}$$

O triângulo de potência é apresentado na figura 7.7.4.

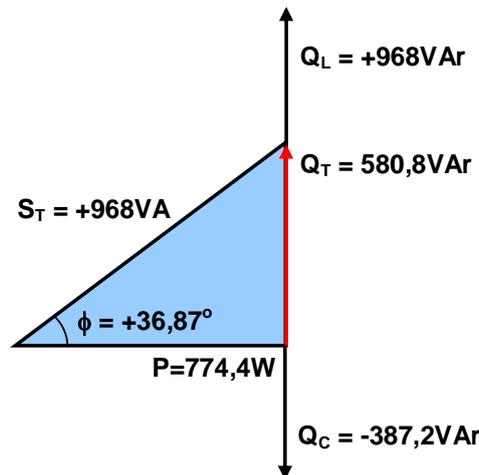


Figura 7.7.4 – Triângulo de potência para o exemplo 7.7.3.

7.8. CORREÇÃO DO FATOR DE POTÊNCIA:

A maioria das cargas industriais e comerciais e, atualmente, também as residenciais apresentam forte característica indutiva. Isto se deve, principalmente, ao acionamento de motores, lâmpadas fluorescentes e equipamentos eletrônicos. É inevitável, então, a solicitação de energia reativa da rede de alimentação, o que provoca um baixo fator de potência para estas cargas. Essa energia reativa, como estudamos, não realiza trabalho pois é constantemente trocada entre a carga e a fonte, provocando sobrecarga nos condutores e perdas de energia na transmissão e distribuição, além do aumento dos custos de geração.

Para minimizar este problema, devemos reduzir a energia reativa absorvida da rede de alimentação através do processo conhecido por **Correção do Fator de Potência**. Atualmente as normas brasileiras exigem que as unidades consumidoras industriais e comerciais apresentem um fator de potência superior a 0,92, estando sujeitos a multas e sobretarifação se este fator não for atingido. Instalações residenciais e industriais e comerciais de pequeno porte ainda não se enquadram nessa exigência.

A maneira tradicional e ainda a mais econômica para a correção do fator de potência é a inclusão de capacitores para a compensação da energia reativa indutiva. Esses capacitores conectados em paralelo com as cargas constituem os chamados **Bancos de Capacitores** para correção do fator de potência.

O projeto de circuitos elétricos depende muito da intensidade da corrente elétrica nas cargas para o dimensionamento dos condutores e dos dispositivos de proteção (fusíveis, disjuntores, etc.). Correntes intensas aumentam as perdas de energia por efeito Joule na resistência intrínseca dos condutores ($P = R \cdot I_{ef}^2$) provocando maior demanda de capacidade de geração de energia na concessionária, além de exigir condutores de maior bitola o que também eleva os custos das instalações.

Dessa forma esforços devem ser feitos no sentido de manter os níveis de corrente nos menores níveis possíveis. Como a tensão eficaz é um valor constante mantido pela concessionária, a capacidade de potência aparente está diretamente relacionada com os níveis de corrente:

$$I_{ef} = \frac{S_T}{V_{ef}}$$

Assim, quanto menor a potência aparente, menores os níveis de corrente nos condutores do circuito. Pela análise do triângulo de potências de um circuito podemos concluir que o menor valor de potência aparente ocorre quando a potência reativa é nula ($Q_T = 0$). Nesse caso $S = P$, ou seja, toda a potência aparente é potência ativa. A figura 7.8.1 mostra que quanto menores os níveis de potência reativa, menores os níveis de potência aparente requeridos e, portanto, menores os níveis de corrente nos condutores que alimentam a carga. Portanto, quanto menor o ângulo ϕ , mais próximo da unidade (1) estará o Fator de Potência e mais resistivo será o teor do circuito (menos reativo).

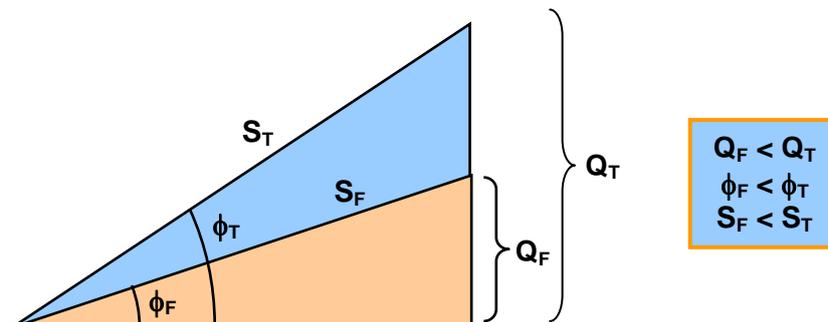


Figura 7.8.1 – Correção do Fator de Potência reduz a potência aparente S .

A **Correção do Fator de Potência** é, portanto, o processo no qual se introduz elementos reativos no circuito para tornar o fator de potência mais próximo da unidade. Como a maioria das cargas tem teor indutivo, o processo normalmente é feito com a inclusão de elementos capacitivos para compensar (reduzir) a potência reativa total do circuito. Esses elementos geralmente são capacitores que são conectados em paralelo com a carga, de tal forma que, tanto a carga como os capacitores são alimentados pela mesma tensão. O processo de correção do fator de potência deve, portanto, determinar o valor da capacitância dos capacitores do Banco de Capacitores para a compensação da energia reativa.

Exemplo 7.8.1: Um motor elétrico de 10CV de potência mecânica, cujo fator de potência é de 0,75 apresenta um rendimento de 90% e é alimentado a partir de uma rede de $220V_{ef}$. Determine:

- o triângulo de potência para este motor;
- o capacitor ideal que deve ser conectado em paralelo ao motor para corrigir o fator de potência para 0,92, segundo as normas brasileiras;

c) a variação no nível de corrente para o sistema não compensado e compensado;

Sabendo que $1\text{CV} = 736\text{W}$, o motor disponibiliza em seu eixo uma potência mecânica de:

$$P_{\text{mec}} = 736 \cdot 10 = 7360\text{W}$$

Como o rendimento do motor é 90%, significa que para disponibilizar 7360W de potência mecânica no eixo, o motor deverá absorver da rede uma potência elétrica dada por:

$$\eta(\%) = \frac{P_{\text{mec}}}{P_{\text{elétrica}}} \cdot 100$$

$$P_{\text{elétrica}} = \frac{7360}{90} \cdot 100 = 8177,8\text{W}$$

O fator de potência é $\cos\phi = 0,75$. Portanto a potência aparente pode ser dada por:

$$P = S \cdot \cos\phi$$

$$S = \frac{P}{\cos\phi} = \frac{8177,8}{0,75} = 10903,7\text{VA}$$

O ângulo ϕ pode ser determinado por:

$$\phi = \cos^{-1}(0,75) = 41,41^\circ$$

E a potência reativa pode ser determinada por:

$$Q = S \cdot \sin\phi = 10903,7 \cdot \sin(41,41^\circ) = 7212,1\text{VAr}$$

Com os valores das potências e o ângulo podemos determinar o triângulo das potências, como mostra a figura 7.8.2(a).

O fator de potência deve ser corrigido para 0,92. Isso significa que o ângulo ϕ_F após compensação deverá ser de:

$$\phi_F = \cos^{-1}(0,92) = 23,07^\circ$$

A potência ativa deve permanecer a mesma. Portanto, a potência aparente final será de:

$$S_F = \frac{P_F}{\cos\phi_F} = \frac{8177,8}{0,92} = 8888,9\text{VA}$$

A potência reativa resultante no circuito, após a compensação, será dada por:

$$Q_F = S_F \cdot \sin\phi_F = 8888,9 \cdot \sin(23,07^\circ) = 3483,2\text{VAr}$$

A figura 7.8.2(b) mostra o triângulo de potência para a condição final compensada.

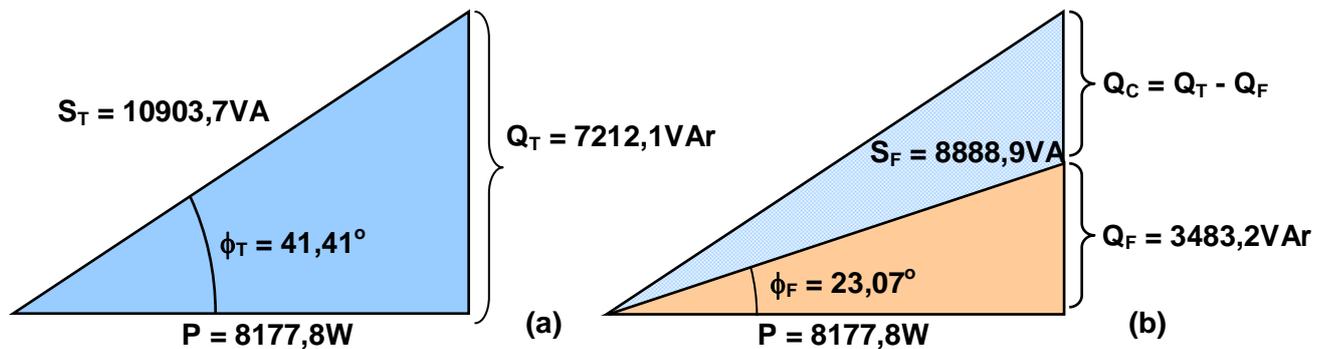


Figura 7.8.2 – Triângulo de potências do exemplo 8.1: (a) situação inicial; (b) sistema compensado.

O capacitor que deverá ser conectado para compensar o fator de potência deverá fornecer uma potência reativa de:

$$Q_C = Q_T - Q_F = 7212,1 - 3483,2 = 3728,9\text{VAr}$$

Como $Q_C = \frac{V_{\text{efC}}^2}{|X_C|} = \frac{V_{\text{efC}}^2}{\frac{1}{\omega C}} = V_{\text{efC}}^2 \cdot (\omega C) = V_{\text{efC}}^2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot f \cdot C)$, a capacitância do capacitor é:

$$C = \frac{Q_C}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot V_{\text{efC}}^2} = \frac{3728,9}{2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 220^2} = 204\mu\text{F}$$

Como é uma capacitância elevada, talvez mais de um capacitor deva ser ligado em paralelo para que se obtenha esse valor.

A corrente inicial, antes da compensação, pode ser dada por:

$$I_{\text{efT}} = \frac{S_T}{V_{\text{ef}}} = \frac{10903,7}{220} = 49,6\text{A}$$

A corrente final, após a correção do fator de potência, pode ser dada por:

$$I_{\text{efF}} = \frac{S_F}{V_{\text{ef}}} = \frac{8888,9}{220} = 40,4\text{A}$$

Podemos concluir que houve uma redução substancial no valor da corrente absorvida da rede elétrica, após a correção do fator de potência.

7.9. EXERCÍCIOS

- 7.9.1. A potência instantânea absorvida por um circuito é $p(t) = 10 + 8 \sin(377t + 40^\circ)$ (W). Achar as potências média, mínima e máxima absorvidas.
- 7.9.2. Com $v(t) = 300 \sin(20t + 30^\circ)$ (V) aplicado, um circuito solicita uma corrente $i(t) = 15 \sin(20t + 25^\circ)$ (A). Achar as potências média, máxima e mínima absorvidas.
- 7.9.3. Um indutor de 120 mH é excitado por 120 V em 60 Hz. Achar as potências média, de pico e reativa absorvidas.

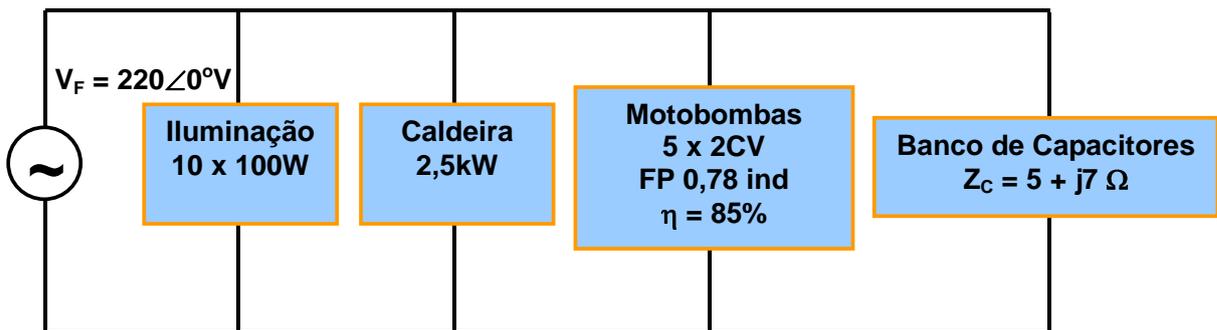
7.9.4. Quais são as potências complexa, real, reativa e aparente em uma carga de $30\angle 40^\circ \Omega$ cuja corrente é $4\angle 20^\circ \text{ A}$.

7.9.5. Achar as componentes da potência de uma carga que solicita $20\angle -30^\circ \text{ A}$ quando submetida a $240\angle 20^\circ \text{ V}$.

7.9.6. Uma instalação elétrica industrial é composta pelas cargas da figura abaixo.

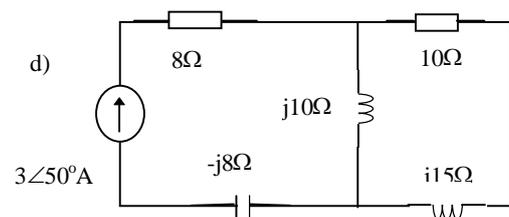
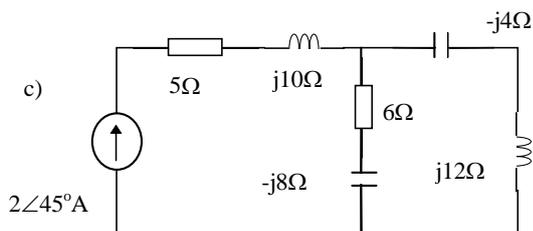
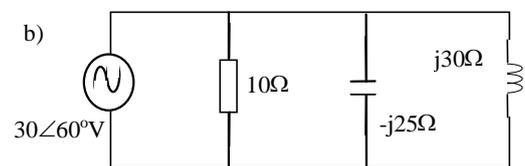
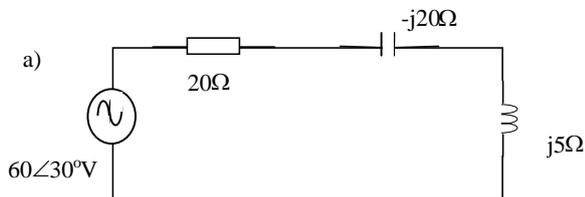
- Determine a potência ativa, reativa e aparente de cada carga;
- Determine o triângulo de potências e o fator de potência da instalação; ($12642,8\text{W}$; $4442,6\text{Var}$; $13400,6\text{VA}$; $0,94$)
- Determine a corrente absorvida da fonte; ($60,9\text{A}$)

Considere: $1\text{CV} = 736\text{W}$



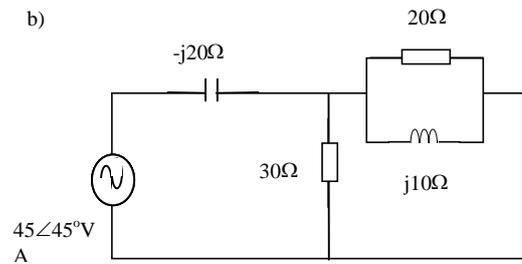
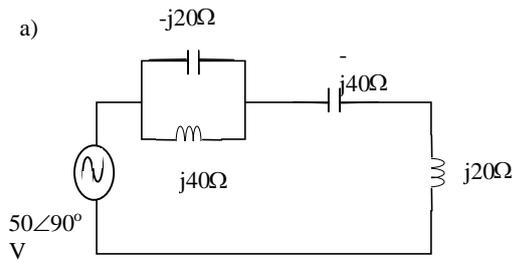
7.9.7. Para os circuitos abaixo, determine:

- A impedância equivalente e o triângulo de impedâncias;
- A corrente fornecida pela fonte;
- O triângulo de potências do circuito e o fator de potência;



7.9.8. Para cada circuito abaixo, determine:

- O triângulo de potências do circuito e o fator de potência;
- a potência em cada um dos elementos
- a energia dissipada pelos elementos resisivos em um ciclo de 60Hz;
- a energia absorvida ou devolvida em meio ciclo nos elementos reativos.



- 7.9.9. Um motor de 3CV de potência mecânica no eixo, fator de potência 0,65 e rendimento de 85% é alimentado por $220V_{ef} / 60\text{Hz}$. Determine:
- O triângulo de potência desse motor;
 - A corrente absorvida da rede elétrica;
 - A capacitância que corrige o fator de potência para 0,96;
 - A corrente absorvida da rede elétrica após a correção do fator de potência.
- 7.9.10. Uma subestação alimenta por uma linha monofásica a 3,8kV, as seguintes cargas: 250kW a fator de potência unitário e 1500kW a fator de potência 0,6 indutivo.
- Determine a corrente fornecida pela subestação e o fator de potência do sistema; (700A; 0,657)
 - A potência reativa e a reatância do banco de capacitores que deverá corrigir esse fator de potência para 0,85. (915VAR; 15,8Ω).

- 7.9.11. Prove matematicamente que a capacitância para correção do fator de potência pode ser calculada diretamente por:
$$C = \frac{P}{\omega \cdot V_{ef}^2} \cdot (\text{tg}\phi_{\text{inicial}} - \text{tg}\phi_{\text{corrigido}})$$

- 7.9.12. Uma carga indutiva formada por um sistema de iluminação fluorescente com reatores eletromagnéticos utiliza um banco atual de capacitores para correção do fator de potência. Determine o fator de potência atual da instalação e determine a capacitância a ser acrescentada para que o fator de potência final seja 0,92.

Dados:

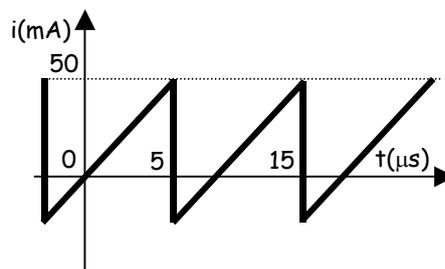
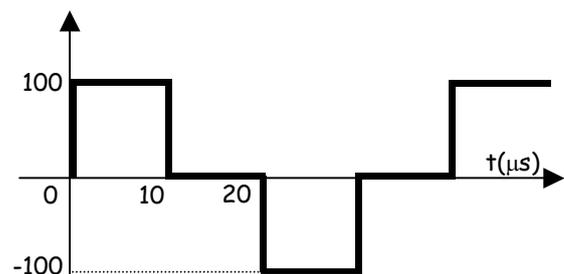
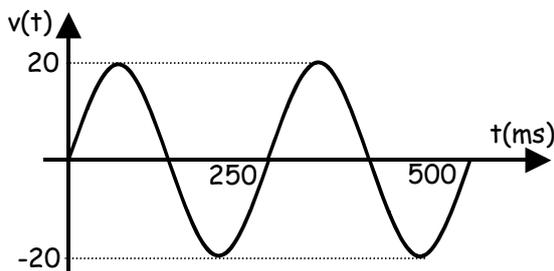
Alimentação: $220V_{ef} / 60\text{Hz}$

Sistema de iluminação: $R = 20\Omega$ e $L = 53\text{mH}$

Capacitância do banco atual: $177\mu\text{F}$

8. EXERCÍCIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

- 8.1) Um gerador de 10 pólos tem um fluxo magnético de $4 \times 10^{-2} \text{Wb}$ por pólo. O rotor gira a 720rpm. Determine a tensão induzida média para 30 espiras. *R: -288V.*
- 8.2) A tensão induzida em 20 espiras de um enrolamento de um gerador de dois pólos é 60V. Determine o fluxo magnético desta máquina sabendo que a velocidade é 3600rpm. *R: 12,5mWb.*
- 8.3) O movimento relativo de um campo magnético de 20 pólos com relação às bobinas de um gerador é 360rpm. Qual deve ser o fluxo por pólo para que seja gerada uma tensão de 0,5V por espira? *R: 2,083mWb.*
- 8.4) Um gerador de 8 pólos pode fornecer energia normalmente girando entre 700 a 900rpm. O fluxo por pólo é de 0,03Wb. Em que velocidade haverá máxima tensão gerada por espira? Neste caso, qual a freqüência da tensão gerada e qual a freqüência da menor tensão gerada? *R: 900rpm; 60Hz; 46,67Hz.*
- 8.5) Para as formas de onda, determine:
- período T
 - número de ciclos mostrados
 - freqüência;
 - amplitude positiva máxima e valor de pico a pico.
 - fator de forma



- 8.6) Determinar o período e a freqüência angular:
- 20Hz;
 - 93,7MHz;
 - 720kHz;
 - 0,5Hz;
- 8.7) Determinar a freqüência e a freqüência angular:
- 1/60s;
 - 10ms;

- c) $50\mu\text{s}$;
- d) 5s;
- e) 50min;
- f) 40 ciclos em 5 segundos.

8.8) Converta para radianos:

- a) 30° ;
- b) 45° ;
- c) 90° ;
- d) 120° ;
- e) 320° ;
- f) 100° ;

8.9) Converta para graus:

- a) $\pi/2$ rad;
- b) $3\pi/4$ rad
- c) 5π rad;
- d) 1 rad;
- e) 6,28 rad.

8.10) Dada uma frequência de 60Hz, determine o tempo da forma senoidal para percorrer 30° ;

8.11) Determine a amplitude e a frequência e esboce as formas de onda para abscissa dada em graus, radianos e tempo:

- a) $2000\text{sen}(100t)$;
- b) $\sqrt{2} \cdot 220 \cdot \text{sen}(377t)$;
- c) $-30\text{sen}(12,56t)$.

8.12) No exercício anterior, determine para cada função o valor instantâneo para:

- a) $t=10\text{ms}$
- b) $t=2\text{s}$
- c) $\frac{1}{4}$ ciclo;
- d) $wt=70^\circ$;
- e) $wt=1,5\pi$ rad.

8.13) Determine os ângulos quando $v=6\text{mV}$ para a função tensão senoidal $v(t)=30 \cdot \text{sen}(\alpha)$ mV.

8.14) Se $v=220\text{V}$ em $\alpha=37,5^\circ$ e $f=60\text{Hz}$, determine a função matemática para o sinal senoidal.

8.15) Esboce:

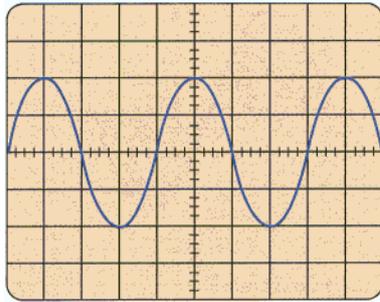
- a) $100\text{sen}(wt+30^\circ)$;
- b) $-20\text{sen}(wt-\pi/3)$;
- c) $5\cos(wt+10)$;
- d) $80\text{sen}(wt+1,5\pi)$;

8.16) Verifique as defasagens entre os sinais senoidais:

- a) $v(t) = 10\text{sen}(wt+0^\circ)$ e $i(t)=6\text{sen}(wt+30^\circ)$;
- b) $v(t) = 25\text{sen}(wt-30^\circ)$ e $i(t)=10\text{sen}(wt+60^\circ)$;

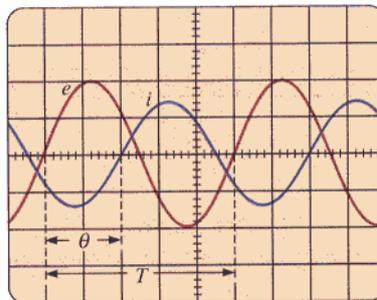
c) $v(t) = -10\text{sen}(\omega t + 30^\circ)$ e $v(t) = 2\text{cos}(\omega t - \pi/4)$

8.17) Determine todos os parâmetros possíveis e a função matemática para o sinal obtido no osciloscópio, sendo a escala horizontal 0,2ms/divisão e vertical 2V/divisão com a ponteira na posição x10.

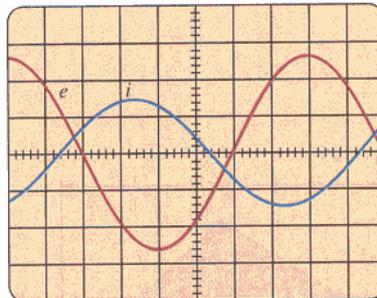


8.18) Determine todos os parâmetros possíveis e a função matemática para os sinais obtidos no osciloscópio além da defasagem entre eles:

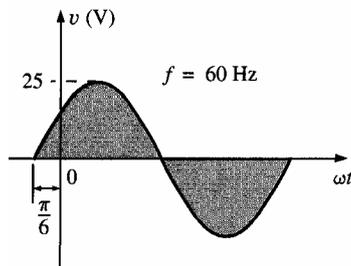
a) escala horizontal 0,2ms/divisão e vertical 2V/divisão com a ponteira na posição x10.



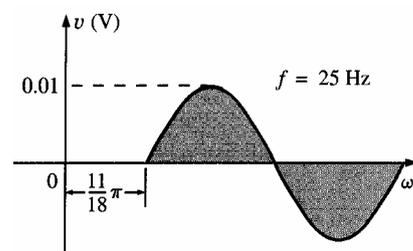
b) escala horizontal 1μs/divisão e vertical 5V/divisão.



8.19) Determine a função matemática para os sinais senoidais abaixo:

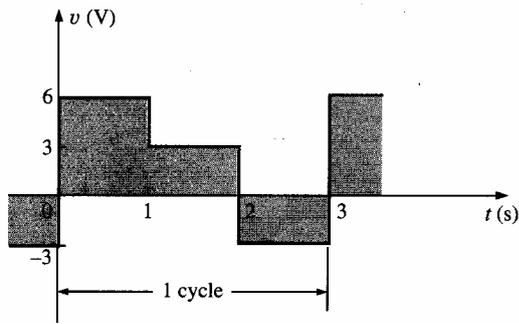


(a)

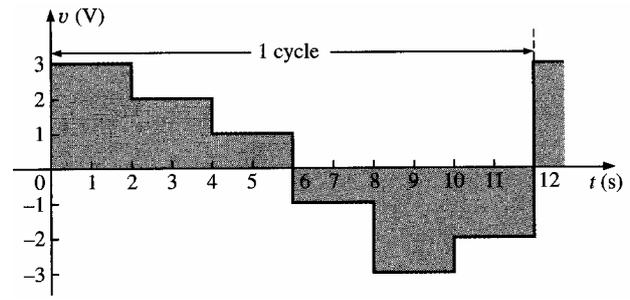


(b)

8.20) Determine o valor da tensão média e da tensão eficaz e o fator de forma para os sinais alternados periódicos abaixo:



(a)



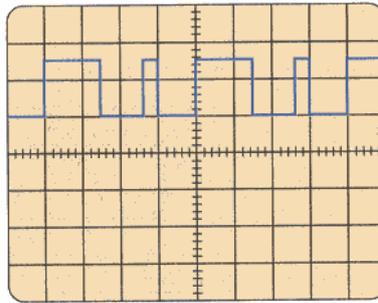
(b)

resp. (b) eficaz: 2,16V

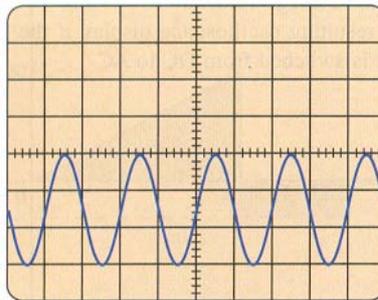
8.21) Para a forma de onda abaixo, determine:

- período;
- freqüência;
- valor médio (17,13mV)
- valor eficaz;
- esboce a forma de onda apresentada no osciloscópio se este tiver o canal vertical for chaveado de CC para CA.

Dados: escala de tempo $10\mu\text{s}/\text{div}$ e escala de tensão $10\text{mV}/\text{div}$.

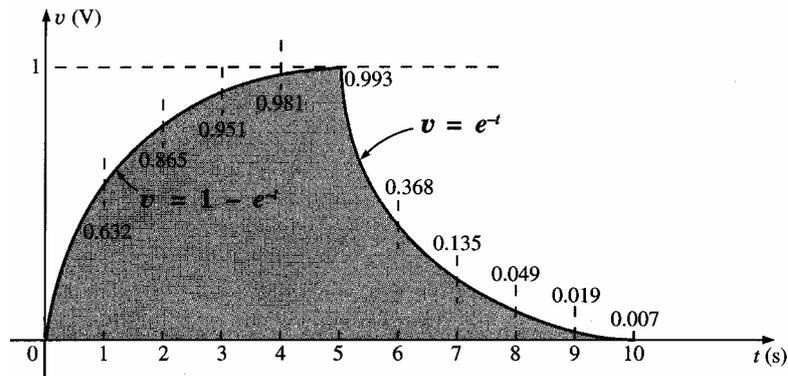


Dados: escala de tempo $50\mu\text{s}/\text{div}$ e escala de tensão $0,2\text{V}/\text{div}$.



resp: $V_{med} = -0,3\text{V}$; $V_{ef} = 367\text{mV}$

8.22) DESAFIO! Determine o valor médio e eficaz para a curva de tensão de carga e descarga de um capacitor representada no gráfico abaixo.



8.23) Assinale (V) quando a afirmativa for verdadeira e (F) quando a afirmativa for falsa. Se falsa justifique porque.

- () Resistores são componentes passivos que aumentam a corrente de um circuito.
- () Circuitos CA puramente resistivos apresentam tensão alternada defasada de 45° em relação a corrente.
- () A tensão e a corrente em circuitos resistivos CA estão em fase.
- () O valor da tensão sobre um resistor num circuito CA é igual a: $V_R = IR$.

8.24) Assinale (V) quando a afirmativa for verdadeira e (F) quando a afirmativa for falsa. Se falsa justifique porque.

- () Em circuitos de corrente contínua os capacitores nunca são carregados.
- () Quando um capacitor esta sendo carregado a corrente no circuito é constante.
- () Constante de tempo de um circuito capacitivo corresponde ao tempo que a tensão leva para atingir seu valor final.
- () Constante de tempo de um circuito capacitivo corresponde ao tempo que a tensão levaria para atingir seu valor final se variasse de forma constante.
- () No processo de descarga do capacitor a tensão final é igual a tensão inicial.
- () Num circuito CC com capacitor a tensão sofre variações instantâneas.
- () Num circuito CC com capacitor a corrente pode sofrer variações instantâneas.
- () Num circuito RC de CA existe uma defasagem de 90° entre a tensão e a corrente.
- () Num circuito RC de CA a corrente esta atrasada de 90° em relação a tensão sobre o capacitor.
- () Num circuito RC de CA a corrente esta adiantada de 90° em relação a tensão sobre o capacitor.

8.25) Assinale (V) quando a afirmativa for verdadeira e (F) quando a afirmativa for falsa. Se falsa justifique porque.

- () Quando fechamos a chave em um circuito RL de CC a corrente assume instantaneamente seu valor final.
- () A tensão sobre o resistor num circuito RL de CC é sempre constante.
- () Constante de tempo de um circuito indutivo corresponde ao tempo que a tensão sobre o indutor leva para atingir seu valor final.
- () Constante de tempo de um circuito indutivo corresponde ao tempo que a tensão sobre o indutor levaria para atingir seu valor final se variasse de forma constante.
- () Quando abrimos um circuito indutivo a corrente decai a zero somente depois de um intervalo de tempo diferente de zero.

- () Num circuito CC com indutor a tensão pode sofrer variações instantâneas.
- () Num circuito CC com indutor a corrente pode sofrer variações instantâneas.
- () Num circuito RL de CA a corrente esta sempre em fase com a tensão do indutor.
- () Num circuito RL de CA a corrente esta atrasada de 90° em relação a tensão sobre o indutor.
- () Num circuito RC de CA a corrente esta adiantada de 90° em relação a tensão sobre o indutor.

8.26) Represente na forma fasorial (polar e retangular) os seguintes sinais senoidais:

- a) $v_1(t) = 277 \cdot \text{sen}(500 \cdot t + 30^\circ)$ V
- b) $i_1(t) = 10 \cdot \text{sen}(2000 \cdot t + 60^\circ)$ A
- c) $v_2(t) = 400 \cdot \text{sen}(277 \cdot t)$ V
- d) $i_2(t) = 0,35 \cdot \text{sen}(1000 \cdot t + 120^\circ)$ A

8.27) Dados os sinais senoidais abaixo, determine:

- a) Valor de pico, pico a pico, eficaz, período, frequência, frequência angular, fase inicial e defasagem;
- b) fasor (polar e retangular);
- c) diagrama fasorial completo.

$$v_1(t) = 500 \cdot \text{sen}(700 \cdot t)$$

$$v_2(t) = 250 \cdot \text{sen}(700 \cdot t + 90^\circ)$$

$$i_1(t) = 100 \cdot \text{sen}(700 \cdot t - 30^\circ)$$

$$i_2(t) = 200 \cdot \text{sen}(700 \cdot t + 60^\circ)$$

8.28) Seja uma fonte de tensão alternada $V_f = 156 \angle 0^\circ$ V (60Hz) alimentando um circuito com um indutor ideal de 200mH determinar:

- a) reatância do indutor (forma retangular e polar);
- b) corrente na bobina (domínio do tempo e da frequência);
- c) esboço dos gráficos da tensão e da corrente no indutor;
- d) diagrama fasorial.

8.29) Seja uma fonte de tensão alternada $V_f = 10 \angle 0^\circ$ V (500Hz) alimentando um resistor em série com um indutor. Sabendo que a fonte fornece 20mA para o circuito, determine:

- a) a reatância indutiva e a indutância do indutor;
- b) a impedância total do circuito (retangular e polar);
- c) o diagrama fasorial;

8.30) Em que frequência uma indutância de 56mH apresenta reatância de 100Ω ?

8.31) Em que frequência um capacitor de $2000\mu\text{F}$ apresenta uma reatância de 100Ω ?

8.32) Em que frequência um indutor de 5mH tem a mesma reatância de um capacitor de $0,1\mu\text{F}$? R: 7,12kHz.

8.33) Trace os sinais senoidais, determine as derivadas das funções, trace a forma de onda das derivadas e compare as amplitudes e faça uma relação com as inclinações da função original.

- a) $f(t) = 50 \cdot \text{sen}(1000 \cdot t)$
- b) $v(t) = 220\sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t + 30^\circ)$ V

c) $f(t) = -10 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(200 \cdot t - 45^\circ)$

8.34) Determine a expressão da corrente num resistor de 100Ω e num de $2k\Omega$ para as tensões senoidais:

a) $v(t) = 220\sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t)$

b) $v(t) = 15 \cdot \text{sen}(100 \cdot t + 30^\circ)$

8.35) Seja um indutor de 500mH e um capacitor de $1000\mu\text{F}$, determine as suas reatâncias para:

a) corrente contínua;

b) 60Hz

c) $T = 0,1\text{ms}$

8.36) Determine a indutância L e a capacitância C para os valores de reatâncias dados:

a) 100Ω , 60Hz ;

b) $5k\Omega$, 1000Hz ;

8.37) Seja $L = 500\text{mH}$ e $C = 1000\mu\text{F}$, determine as correntes sobre esses elementos sendo:

a) $v(t) = 220\sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t)$

b) $v(t) = 15 \cdot \text{sen}(100 \cdot t + 30^\circ)$

8.38) Os sinais de tensão e corrente abaixo correspondem a um bloco de carga. Determine a defasagem entre os sinais e o tipo e valor do componente correspondente:

a) $v(t) = 220\sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t + 30^\circ)$ e $i(t) = 31,1 \cdot \text{sen}(377 \cdot t - 60^\circ)$

b) $v(t) = 100 \cdot \text{sen}(200 \cdot t - 10^\circ)$ e $i(t) = 20 \cdot \text{sen}(200 \cdot t + 80^\circ)$

c) $v(t) = 30 \cdot \text{sen}(200 \cdot t + 90^\circ)$ e $i(t) = 5 \cdot \cos(200 \cdot t)$

8.39) Trace X_L , X_C e R para uma faixa de frequências desde 0Hz até 100kHz , sendo $L = 5\text{mH}$; $C = 125\text{nF}$ e $R = 100\Omega$.

a) Determine a frequência em que $X_L = R$ e $X_C = R$;

b) Determine a frequência em que $X_L = X_C$;

c) Determine a frequência em que $X_L = 2 \cdot X_C$;

d) Determine X_C , X_L e R para $f = 30\text{kHz}$.

8.40) Represente no domínio fasorial:

a) $v(t) = 100 \text{sen}(5t + 45^\circ) \text{V}$

b) $v(t) = 110\sqrt{2} \text{sen}\left(377t - \frac{\pi}{3}\right) \text{V}$

c) $i(t) = 1,41 \cdot 10^{-3} \text{sen}(1000t + 60^\circ) \text{A}$

d) $i(t) = 20\sqrt{2} \cos\left(200t - \frac{\pi}{4}\right) \text{mA}$

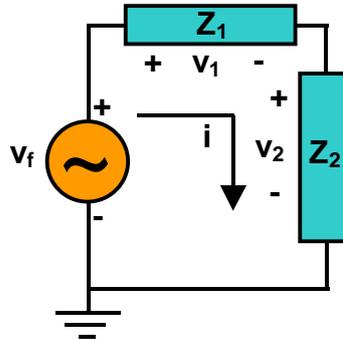
8.41) Represente no domínio do tempo:

a) $\dot{i} = 20 \angle 120^\circ \mu\text{A}$

$$b) \dot{V} = 5 \angle -\frac{3\pi}{2} \text{ V}$$

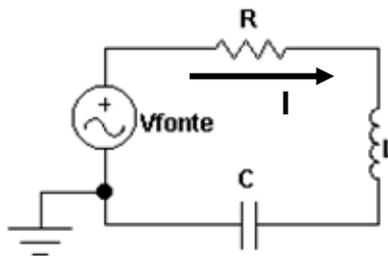
$$c) \dot{V} = 3\sqrt{2} \angle 90^\circ \text{ mV}$$

8.42) Determine o valor de v_f sendo $v_1(t) = 6\sqrt{2} \text{ sen}(377t + 30^\circ) \text{ V}$ e $v_2(t) = 10\sqrt{2} \text{ sen}(377t - 45^\circ)$. Sendo $i(t) = 2\sqrt{2} \text{ sen}(377t + 60^\circ)$ determine o teor dos elementos do circuito.



8.43) Seja o circuito da figura abaixo, onde $i(t) = 2 \text{ sen}(120\pi t + 32^\circ)$, $R = 8,47\Omega$; $L = 25 \text{ mH}$ e $C = 180 \mu\text{F}$. Determine:

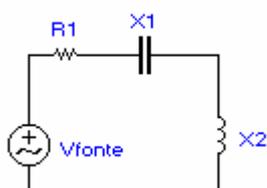
- as reatâncias capacitiva e indutiva;
- a impedância equivalente do circuito: *Resp: $8,47 - j5,32 \Omega$*
- as tensões nos terminais do resistor, do capacitor e do indutor;
- a tensão nos terminais da fonte senoidal: *resp: $20 \angle 0^\circ \text{ V}$*
- trace o diagrama fasorial do circuito;
- trace o triângulo de impedâncias e determine o teor do circuito.



8.44) Descreva o procedimento para determinar experimentalmente a indutância de um indutor e a capacitância de capacitor quando conectados a um circuito de corrente alternada.

8.45) No circuito abaixo, para cada valor de frequência dado, determine:

- A impedância equivalente;
- A corrente total fornecida pelo gerador;
- O ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente e o teor do circuito;
- Explique o comportamento deste circuito com relação à variação da frequência.



Dados:

$$v_{\text{fonte}} = 15 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$R1 = 150\Omega$$

$$C = 100\text{nF}$$

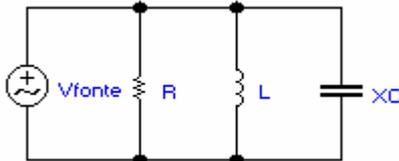
$$L = 1\text{mH}$$

$$F1 = 80\text{ kHz}$$

$$F2 = 100\text{ kHz}$$

$$F3 = 120\text{ kHz}$$

8.46) Qual o teor do circuito quando a fonte opera com uma freqüência da 1 kHz? Qual o valor da capacitância C?



Dados:

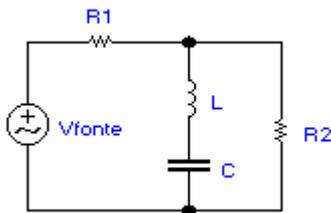
$$V_{\text{fonte}} = 10\text{V}$$

$$R1 = 500\Omega$$

$$L = 32\text{mH}$$

$$XC = -j500\Omega$$

8.47) Determinar a tensão no resistor R2. Explique o resultado.



Dados:

$$V_{\text{fonte}} = 60 \angle 159\text{Hz}$$

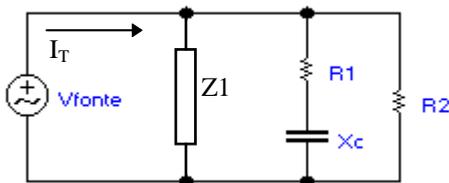
$$R1 = 20\Omega$$

$$R2 = 60\Omega$$

$$L = 1\text{H}$$

$$C = 1\mu\text{F}$$

8.48) Determinar o valor da impedância Z1 no circuito. Esta impedância pode ser considerada um resistor de aproximadamente 4Ω com um indutor em série? Porque?



Dados:

$$V_{\text{fonte}} = 50 \angle 30^\circ \text{ V}$$

$$I_T = 27,9 \angle 57,8^\circ \text{ A}$$

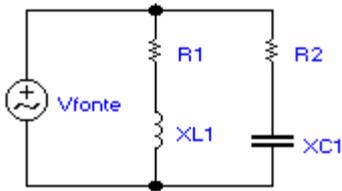
$$R1 = 3\Omega$$

$$R2 = 5\Omega$$

$$Xc = -j4\Omega$$

8.49) Para o circuito abaixo, determinar:

- Impedância total do circuito (equivalente)
- Ângulo de defasagem entre tensão e corrente, teor do circuito e fator de potência
- Corrente total fornecida pela fonte e as correntes nos resistores
- Diagrama fasorial completo;
- Potência nos resistores e o triângulo de potências na fonte
- Some as potências nos resistores e compare com a potência aparente total e ativa total. Explique.



Dados:

$$V_{\text{fonte}} = 110 \angle 80^\circ \text{ V}$$

$$R1 = 4 \Omega$$

$$R2 = 3 \Omega$$

$$XL1 = +j3 \Omega$$

$$XC1 = -j4 \Omega$$

8.50) Para o circuito abaixo, determinar:

- Impedância total do circuito (equivalente)
- Ângulo de defasagem entre tensão e corrente, teor do circuito e fator de potência
- Corrente total fornecida pela fonte e as correntes nos capacitores
- Diagrama fasorial completo;
- Potências nos capacitores e o triângulo de potências na fonte
- Some as potências reativas nos capacitores e compare com a potência aparente total e reativa total. Explique.

Dados:

$$V_{\text{fonte}} = 110 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$R1 = 10 \Omega$$

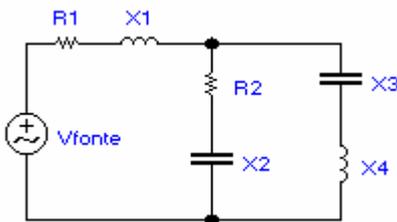
$$R2 = 8 \Omega$$

$$X1 = +j5 \Omega$$

$$X2 = -j5 \Omega$$

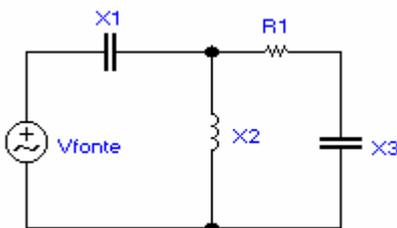
$$X3 = -j5 \Omega$$

$$X4 = +j10 \Omega$$



8.51) Para o circuito abaixo, determinar:

- Impedância total do circuito (equivalente)
- Ângulo de defasagem entre tensão e corrente, teor do circuito e fator de potência
- Correntes em todos os elementos do circuito
- Potência total fornecida pela fonte (triângulo de potências)
- Some as correntes no indutor e no resistor e compare com a corrente total. Explique.
- Por que a potência ativa é positiva e a reativa negativa?



Dados:

$$V_{\text{fonte}} = 70,71 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$R1 = 10 \Omega$$

$$X1 = -j10 \Omega$$

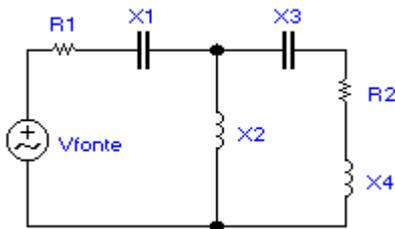
$$X2 = +j20 \Omega$$

$$X3 = -j10 \Omega$$

8.52) Para o circuito abaixo, determinar:

- A corrente que circula no capacitor de $XL = -j10 \Omega$, sabendo que a corrente no indutor de $XL = +j8 \Omega$ é de $5 \angle -50^\circ \text{ A}$.
- A corrente total fornecida pela fonte
- A tensão da fonte

- d. A potência dissipada nos resistores
- e. Por que as potências são diferentes se os resistores são iguais?
- f. Qual a potência dissipada total e qual a potência aparente total. Há diferença entre elas?



Dados:

$$R1 = 10\Omega$$

$$R2 = 10\Omega$$

$$X1 = -j5\Omega$$

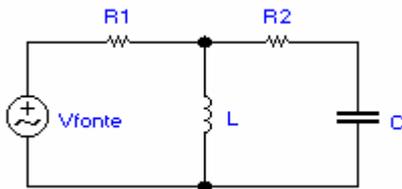
$$X2 = +j8\Omega$$

$$X3 = -j10\Omega$$

$$X4 = +j15\Omega$$

8.53) Para o circuito abaixo, determine:

- a. a impedância equivalente do circuito;
- b. a corrente total no circuito;
- c. a tensão no resistor R2;
- d. a defasagem entre a tensão e a corrente, o teor do circuito e o fator de potência;
- e. o triângulo de potência na fonte;
- f. as potências reativas nos componentes.



Dados:

$$V_{\text{fonte}}(t) = 100 \cdot \text{sen}(3000 \cdot t + 60^\circ) \text{ V}$$

$$R1 = 2\Omega$$

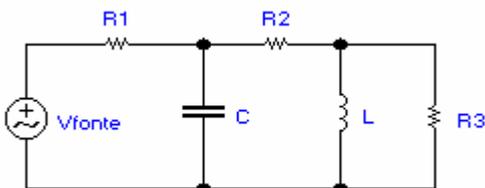
$$R2 = 1\Omega$$

$$L = 1\text{mH}$$

$$C = 20\mu\text{F}$$

8.54) Para o circuito dado, determine:

- a. a impedância equivalente e o teor do circuito;
- b. a corrente total fornecida pela fonte;
- c. a corrente sobre cada elemento;
- d. a potência sobre cada elemento;
- e. a potência total dissipada pelo circuito;
- f. a potência total dissipada pelo circuito, se a fonte CA for substituída por uma fonte CC de $V_{\text{cc}} = 70,71\text{V}$. Qual a diferença? Porque?



Dados:

$$V_{\text{fonte}}(t) = 100 \cdot \text{sen}(20000 \cdot t) \text{ V}$$

$$R1 = 2\Omega$$

$$R2 = 1\Omega$$

$$R3 = 5\Omega$$

$$C = 5\mu\text{F}$$

$$L = 0,3\text{mH}$$

- 8.55) Um indutor desconhecido deve ser analisado em laboratório para verificar suas características nominais de indutância e resistência. Sugira um processo simplificado para determiná-las usando apenas multímetro, osciloscópio e gerador de sinais.
- 8.56) Dado um circuito RLC série alimentado por uma fonte CA de 60Hz, e sabendo-se que o módulo da impedância total é 200Ω , a defasagem entre a tensão e a corrente na fonte é de 60° e $X_C=2X_L$, determine:
- O teor do circuito;
 - O valor de R, L e C
 - O diagrama fasorial e o triângulo de impedâncias.

Resp.: 100Ω ; $7,66\mu F$, $459mH$

- 8.57) Um motor absorve da rede elétrica uma potência de 5kW em 220Vef / 60Hz com FP=0,6. Determine o capacitor para aumentar o fator de potência para 0,9. *Resp.: $230\mu F$*
- 8.58) Uma carga indutiva dissipa 1kW com corrente 10Aef / 60Hz com $\phi=60^\circ$:
- Determine o capacitor para corrigir o fator de potência para 0,85;
 - Calcule a corrente total fornecida pela fonte após a correção;
 - Determine a potência aparente total após a correção.

Resp.: $74\mu F$, $5,88Aef$, $2kVA$

- 8.59) Uma carga indutiva formada por um sistema de iluminação fluorescente com reatores eletromagnéticos utiliza um banco de capacitores para correção do fator de potência. De acordo com as novas regras do Sistema Elétrico, o fator de potência deverá ser superior a 0,92. Indique o valor do capacitor que deverá ser conectado e como, para que a solução seja técnica e economicamente viável.

Dados:

Alimentação: 220Vef / 60Hz

Carga de Iluminação: 20Ω e $53mH$

Capacitância Equivalente do Banco: $177\mu F$

- 8.60) Uma subestação alimenta, por uma linha monofásica a 3,8kV, as seguintes cargas: 250kW a fator de potência unitário e 1500kW a fator de potência 0,6 atrasado. Determine:
- A corrente fornecida pela subestação e o fator de potência da carga que ela aciona;
 - A potência reativa e a reatância do banco de capacitores que corrige esse fator de potência para 0,85.

Resp.: $700A$; $0,657$; $9,5Var$; $15,8\Omega$

- 8.61) Em uma instalação fabril temos uma subestação de 1500kW com FP=0,8. Desejamos adicionar uma carga de 250kW com FP=0,85. Qual a potência reativa do capacitor que deve ser adicionada para que a subestação não seja sobrecarregada? *Resp.: $616kVAR$*

- 8.62) Para praticar Inglês Técnico [Boylestad]: *A small industrial plant has a 10kW heating load and a 20kVA inductive load due to a bank of induction motors. The heating elements are considered purely resistive ($PF=1$), and the induction motors have a lagging power factor of 0.7. If the supply is 1000V at 60Hz, determine the capacitive element required to raise the power factor to 0.95. Compare the levels of current drawn from the supply. Resp.: $16.93\mu F$; $25.27A$*

- 8.63) Para praticar Inglês Técnico [Boylestad]: *The lighting and motor loads of a small factory establish a 10kVA power demand at a 0.7 lagging power factor on a 208V, 60Hz supply.*

- Establish the power triangle for the load*
- Determine the power-factor capacitor that must be placed in parallel with the load to raise the power factor to unity.*

- c) Determine the change in supply current from the uncompensated to the compensated system.
- d) Repeat parts (b) and (c) if the power factor is increased to 0.9.

8.64) Para praticar Inglês Técnico [Boylestad]: The load on a 120V, 60Hz supply is 5kW (resistive), 8kVAR (inductive), and 2kVAR (capacitive).

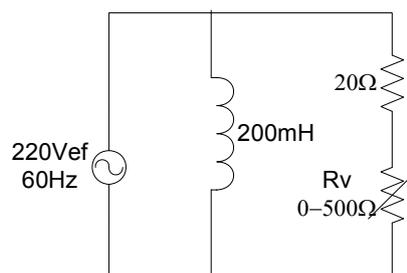
- a) Find the total kilovolt-amperes.
- b) Determine the PF of the combined loads.
- c) Find the current drawn from the supply.
- d) Calculate the capacitance necessary to establish a unity power factor.
- e) Find the current drawn from the supply at unity power factor, and compare it to the uncompensated level.

Resp.: 7.81kVA; 0.64 (lagging); 65.08A; 1105 μ F; 41.67A

8.65) Para o circuito abaixo, determine:

- a) O valor de RV para que o fator de potência seja 0,85.
- b) As correntes em todos os ramos do circuito;
- c) Se $R_V = 0\Omega$, qual o fator de potência? Se for menor que 0,85 calcule o capacitor.
- d) Se $R_V = 100\Omega$, qual o fator de potência? Se for menor que 0,85 calcule o capacitor.

Resp.: 26,7 Ω ; 2,91A; 4,71A; 5,53A; 0,97; 0,53; 21,5 μ F.



8.66) TRABALHO: Para os circuitos RL, RC e RLC típicos, dados pelo professor, determine:

- a) os parâmetros (ω , f , T , θ , V_p , V_{pp} , V_{ef});
- b) o circuito no domínio da frequência;
- c) as correntes e tensões em cada elemento (fasor e eficaz);
- d) diagrama fasorial completo;
- e) curvas de correntes e tensões da fonte e de todos os elementos, num mesmo gráfico;
- f) triângulo de impedâncias equivalentes;
- g) defasagem da corrente com relação à tensão;
- h) Simular no computador os circuitos e determinar: as tensões e correntes (pico, eficaz e média) em cada elemento;
- i) verificar as formas de onda de tensão e corrente em cada elemento;
- j) verificar as defasagens entre tensão e corrente da fonte;
- k) Comparar os resultados calculados com os simulados e elaborar suas conclusões sobre o comportamento dos componentes em CA, diferenças entre os circuitos típicos, formas de onda e defasagens.

8.67) TRABALHO: Obtenha todos os parâmetros possíveis das formas de onda:

$$v_1(t) = 220\sqrt{2} \cdot \text{sen}(377t + 120^\circ); \quad v_2(t) = 220\sqrt{2} \cdot \text{sen}(377t - 120^\circ) \quad \text{e}$$

$$v_3(t) = 220\sqrt{2} \cdot \text{sen}(377t).$$

- traçar o diagrama fasorial com os três sinais;
- fazer $v_{12}(t)=v_1(t)-v_2(t)$; $v_{23}(t)=v_2(t)-v_3(t)$ e $v_{31}(t)=v_3(t)-v_1(t)$ graficamente no diagrama fasorial e matematicamente através da álgebra fasorial;
- traçar os fasores resultantes no diagrama do item (a);
- traçar as três formas de onda e fazer as subtrações ponto a ponto, usando um programa de computador. Mostrar as seis formas de onda num mesmo gráfico.

8.68) TRABALHO: Traçar as formas de onda no computador e obter a somatória dos sinais:

Dados:

$$v_1(t) = 100\text{sen}(\omega t);$$

$$v_3(t) = 33\text{sen}(3\omega t);$$

$$v_5(t) = 20\text{sen}(5\omega t);$$

$$v_7(t) = 14\text{sen}(7\omega t);$$

$$v_9(t) = 11\text{sen}(9\omega t);$$

$$v_{11}(t) = 9\text{sen}(11\omega t);$$

$$f=60\text{Hz e } 1\text{kHz}$$

8.69) TRABALHO: Dada as funções senoidais: $v_1(t)=8\text{sen}(500t+45^\circ)$, $v_2(t)=12\text{sen}(500t-30^\circ)$ e $i_3(t)=5\text{sen}(500t-60^\circ)$:

- Determine o valor de pico, pico a pico, frequência angular, período e frequência, fase inicial, valor eficaz, valor médio e fator de forma;
- Determine a defasagem de v_2 em relação a v_1 , de i_3 em relação a v_1 e de i_3 em relação a v_2 ;
- Trace as formas de onda de v_1 , v_2 e i_3 num mesmo par de eixos utilizando *software* adequado.
- Determine os fasores na forma polar e retangular e trace manualmente o diagrama fasorial;
- Opere e obtenha graficamente as formas de onda para as funções trigonométricas (instantâneas): $v_4=v_1+v_2$, $z_1=v_1/i_3$; $z_2=v_2/i_3$, $p_1=v_1 \cdot i_3$ e $p_2=v_2 \cdot i_3$. Faça um gráfico para cada operação contendo as duas formas de onda de origem e a resultante em cada um.
- Derive as funções v_1 , v_2 e i_3 e trace o gráfico com as formas de onda de origem e resultante;

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- [1] CAETANO, S.; **Notas de aula**. São José: ETFSC-Uned, 1995.
- [2] FOWLER, R.J.; **Eletricidade – princípios e aplicações**. Vol. 2. São Paulo: Makron Books, 1992.
- [3] ALBUQUERQUE, R. O.; **Circuitos em corrente alternada**. Série Estude e Use. São Paulo: Ed. Érica Ltda, 1997.
- [4] BOYLESTAD, R. L. **Introductory circuit analysis**. 10.ed. USA: Prentice Hall, 2003.
- [5] GIANCOLI, D. C. **Physics for scientists and engineers**. 3. ed. USA: Prentice Hall, 2000.
- [6] RANGEL, P. R. T. **Notas de aula**. Florianópolis: CEFET/SC, 2004.

ANEXOS

A.1. RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Algumas Relações Trigonométricas úteis:

$$\text{sen}(\omega \cdot t + 90^\circ) = \text{cos}(\omega \cdot t)$$

$$\text{sen}(\omega \cdot t) = \text{cos}(\omega \cdot t - 90^\circ)$$

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(+\alpha)$$

$$\text{cos}(-\alpha) = \text{cos}(+\alpha)$$

$$\text{cos}(+\alpha) = \text{sen}(\alpha + 90^\circ)$$

$$\text{sen}(+\alpha) = \text{cos}(\alpha - 90^\circ)$$

$$\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta = \frac{1}{2} \cdot [\text{cos}(\alpha - \beta) - \text{cos}(\alpha + \beta)]$$

$$\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos}\alpha \cdot \text{cos}\beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$$

$$\text{cos}\theta_1 \cdot \text{cos}\theta_2 - \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2 = \text{cos}(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\text{cos}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2 + \text{sen}\theta_1 \cdot \text{cos}\theta_2 = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$$

A.2. DERIVADA

O conceito de derivada é importante para o entendimento do comportamento da resposta senoidal dos elementos passivos.

A derivada dx/dt é definida como a taxa de variação de x com relação ao tempo t . Se x não varia num determinado instante de tempo t , $dx=0$ e a derivada é zero.

Para a onda senoidal dx/dt é zero somente nos picos positivo e negativo, quando $\omega t = \pi/2$ e $\omega t = 3\pi/2$, pois x não varia nesses instantes, como mostra a figura A.2.1.

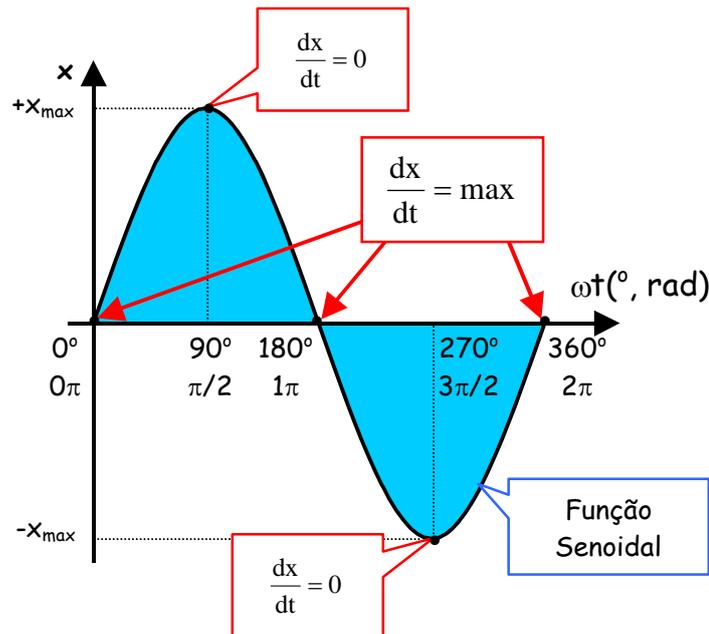


Figura A.2.1 – derivadas máxima e mínima para a função seno.

A derivada dx/dt é, na verdade, a **inclinação** da curva em cada instante de tempo. Um exame da curva senoidal indicará que a maior variação de x ocorre nos instantes $\omega t = 0$, $\omega t = \pi$ e $\omega t = 2\pi$. A derivada é, portanto, máxima nesses pontos. Em $\omega t = 0$ e $\omega t = 2\pi$ o valor de x aumenta com a mesma taxa de variação e a **derivada é positiva** já que x aumenta com o tempo. Em $\omega t = \pi$, o valor de dx/dt diminui na mesma taxa de variação, mas a **derivada é negativa** pois x diminui com o tempo.

Para vários valores de ωt entre esses pontos de máximos e mínimos, a derivada assumirá valores intermediários. Transpondo esses valores para o gráfico da figura A.2.2, obtemos a curva da derivada da função senoidal, que é uma curva cossenoidal. Daí concluímos:

A derivada de uma função senoidal é uma função cossenoidal.

O valor de pico da onda cossenoidal da figura A.2.2 está diretamente relacionado com a frequência da onda senoidal original. Quanto maior a frequência, maior a inclinação da curva com relação ao eixo horizontal (tempo) e, portanto, maior o valor da derivada dx/dt , como mostra a figura A.2.3. Podemos observar que, para um mesmo valor de pico $x_{\text{máx}}$ da função senoidal, a maior frequência produz um pico maior para a derivada. A derivada de uma função senoidal tem o mesmo período e frequência que a função original.

Assim, para a função senoidal:

$$x(t) = X_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(\omega t \pm \theta)$$

A sua derivada pode ser determinada por cálculo diferencial⁹:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(X_{\max} \cdot \text{sen}(\omega t \pm \theta))}{dt} = X_{\max} \cdot d[\text{sen}(\omega t \pm \theta)]$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \omega \cdot X_{\max} \cdot \text{cos}(\omega t \pm \theta) = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot X_{\max} \cdot \text{cos}(\omega t \pm \theta)$$

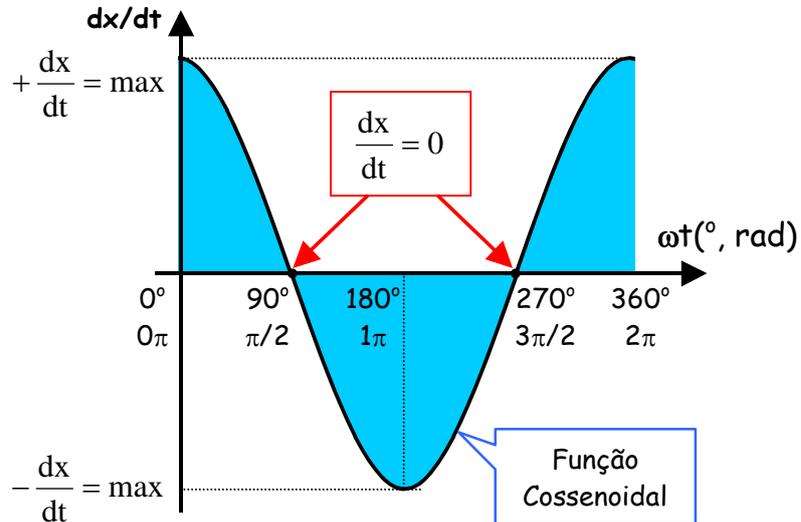


Figura A.2.2 – curva da derivada da função seno.

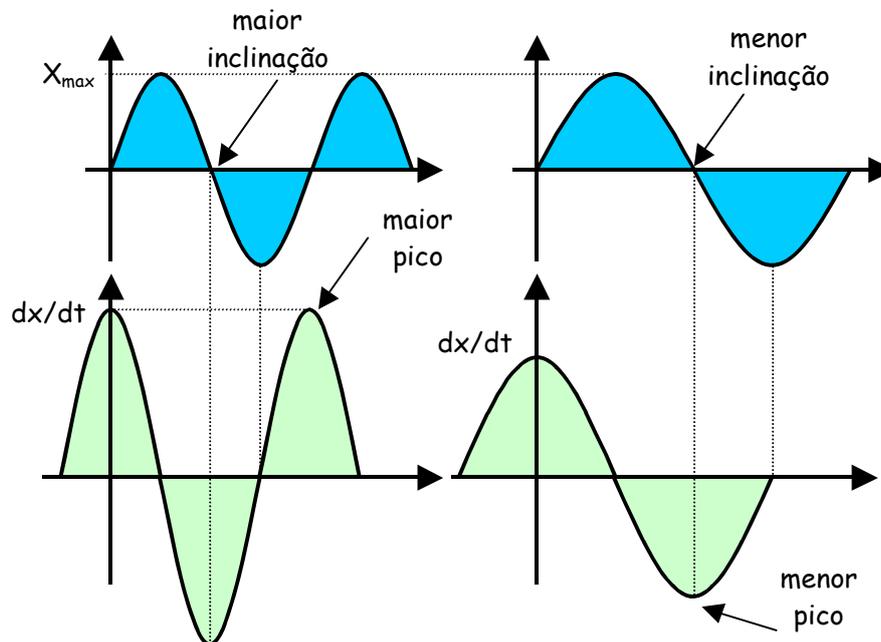


Figura A.2.3 – quanto maior a freqüência maior o valor da derivada da função seno.

⁹ o processo de cálculo diferencial não será discutido aqui.

A.3. MEDIÇÃO DA DEFASAGEM USANDO OSCILOSCÓPIO

O osciloscópio é um instrumento usado para verificar e medir formas de onda de **tensões** periódicas em função do tempo.

Como sabemos que a corrente num resistor está em fase com a tensão a ele aplicada, podemos considerar o ângulo de fase associado com a tensão em um resistor como sendo também o ângulo de fase da corrente.

Se quisermos encontrar o ângulo de defasagem num dado circuito, como indica a figura A.3.1, devemos adicionar um resistor em série e utilizar um osciloscópio de duplo traço (2 canais). Esse resistor série, chamado **Resistor Sensor (ou Shunt)** deve ter resistência conhecida e de baixo valor para não afetar as características do circuito.

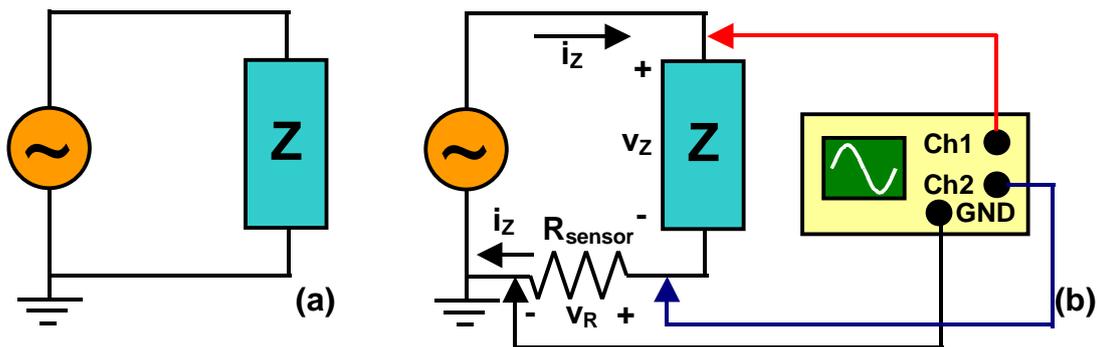


Figura A.3.1 – (a) circuito para medição da defasagem; (b) ligação do resistor sensor e do osciloscópio.

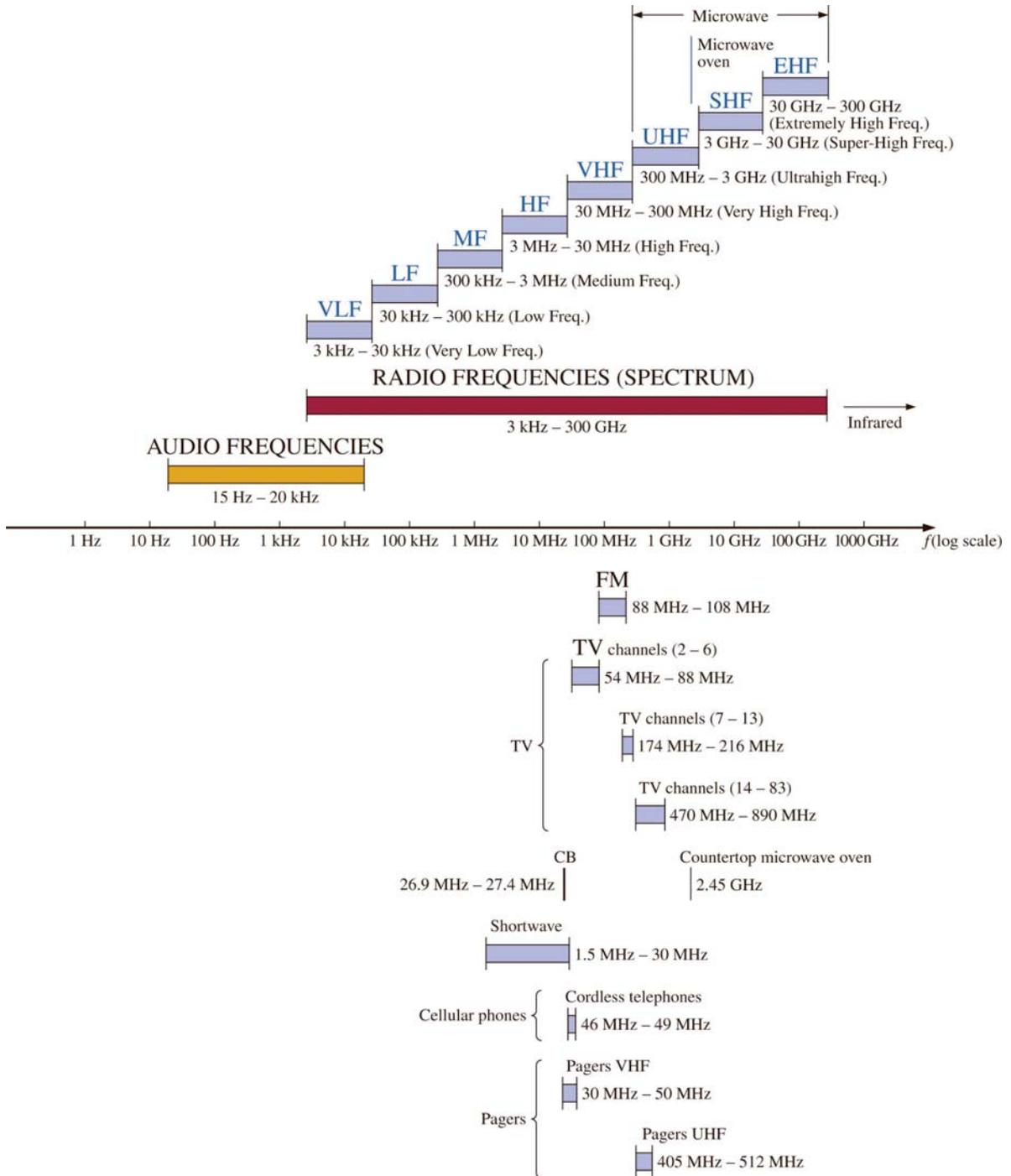
Um canal deve mostrar a forma de onda da tensão na impedância e o outro a forma de onda da tensão no resistor sensor. Como a tensão e a corrente no resistor sensor estão em fase, o ângulo de fase da corrente é igual ao da tensão no resistor. Como o resistor está em série, a corrente na impedância é a mesma do resistor. Assim, a forma de onda da tensão no resistor sensor mostra a forma de onda da corrente na impedância. O valor da corrente pode ser obtido pela divisão do valor da tensão no resistor sensor pelo valor da sua resistência e o ângulo de defasagem pode ser calculado através da relação:

$$\text{período da forma de onda} \Rightarrow 360^\circ$$

$$\text{tempo correspondente à defasagem} \Rightarrow \text{ângulo de defasagem } \theta$$

A.4. ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS

Fonte: BOYLESTAD, R. L. **Introductory circuit analysis**. 10.ed. USA: Prentice Hall, 2003.



A.5. SÉRIES DE FOURIER

[incluir complementação]

Teorema de Fourier

Um sinal periódico qualquer é composto de (ou pode ser decomposto em) uma **série de ondas senoidais**, com frequências múltiplas inteiras da fundamental f_1 , cada uma com uma determinada amplitude e uma determinada fase, mais uma componente contínua (de frequência zero). As ondas senoidais múltiplas inteiras n da fundamental são chamadas **harmônicos** de ordem n .

A onda senoidal é a onda mais simples ou pura que existe, pois se originou da projeção sobre uma reta de um ponto girando em círculo. A senóide tem uma única frequência, e para completar a sua descrição basta indicar a sua amplitude (valor absoluto máximo atingido) e a sua fase.

O espectro de uma senóide é uma raia (pois ocupa uma única frequência), com altura igual à amplitude. No espectro, não é possível representar a fase da raia. Em estudos teóricos, às vezes, se representam raias com fase oposta e relação à outra para baixo do eixo de frequência. Para analisar um sinal complexo (composto), basta decompô-lo em suas componentes senoidais e trabalhar com uma componente por vez. Portanto, é uma ferramenta importante para análise de sinais complexos.

O **ESPECTRO** é a representação das componentes (ou raias ou termos) num gráfico que mostra suas *amplitudes versus frequência*. A **FORMA DE ONDA** é a representação dos valores instantâneos em *função do tempo*.

A figura A.5.1 mostra um exemplo de como é formada uma onda complexa (no caso uma onda quadrada simétrica) e o seu respectivo espectro de componentes harmônicos. A forma de onda resultante (em amarelo) é o somatório a todo instante dos componentes harmônicos (em azul).

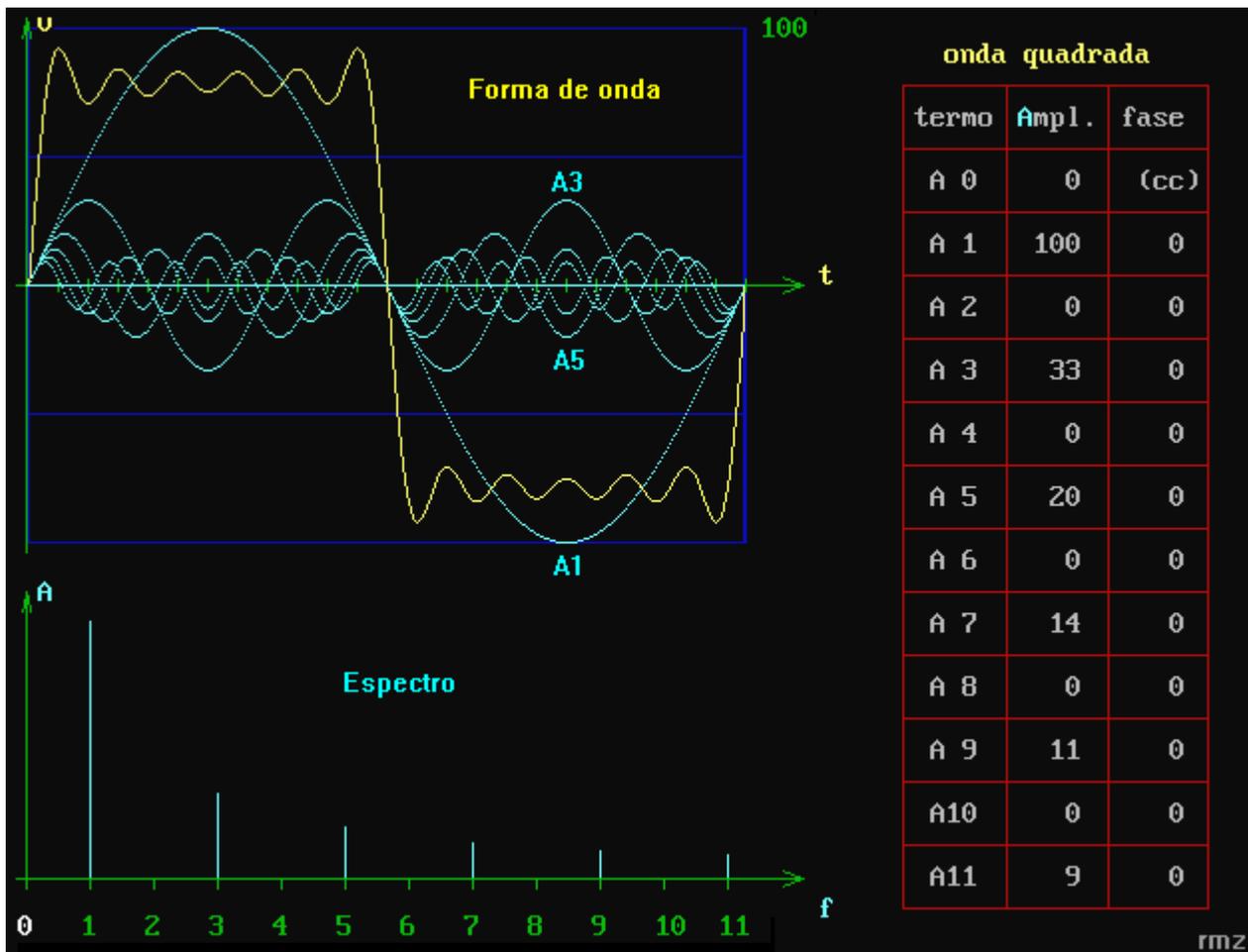


Figura A.5.1 – Espectro de harmônicos de uma forma de onda quadrada simétrica.

Uma onda quadrada simétrica (no eixo do tempo, semi-períodos iguais) é composta de uma infinidade de raios ou senóides correspondentes à frequência fundamental e seus harmônicos ímpares.

A componente fundamental (A0) tem a mesma frequência básica da onda quadrada. A fundamental e os harmônicos ímpares estão em fase na origem (função seno). Se usarmos função cosseno, ou origem no máximo positivo da fundamental, os harmônicos 3, 7, 11,..., tem fase contrária (180 graus) em relação aos termos 1, 5, 9, 13,..., como pode ser visto na figura A.5.1.

O nível ou amplitude relativa dos harmônicos é o nível da fundamental dividido pela ordem n do harmônico em questão. Se a onda quadrada não for simétrica em relação ao eixo de frequência, ou seja, tiver amplitude positiva diferente da negativa, é porque contém uma componente contínua. Como a onda da figura A.5.1 foi construída com harmônicos somente até a ordem 11, a sua forma de onda ainda não é perfeitamente quadrada.

Para entender melhor a diferença, ou mais precisamente, a relação entre forma de onda e espectro, a figura A.5.2 mostra isto de forma tridimensional (em perspectiva para ser mais exato) para a onda quadrada da figura a.5.1:

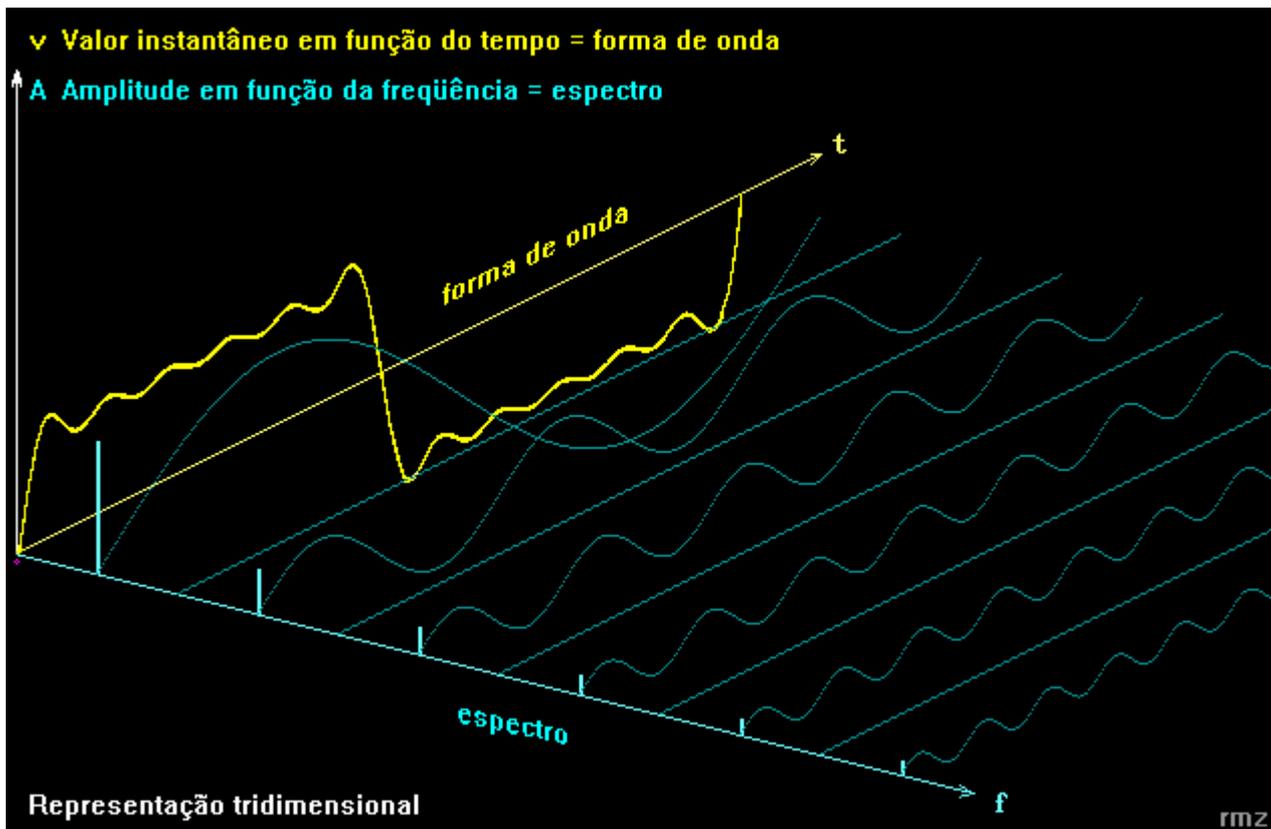


Figura A.5.2 – Representação tridimensional do espectro de uma onda

Os três eixos da figura A.5.2 são ortogonais (em perspectiva), ou seja, estão todos a 90 graus um em relação ao outro. Por isso, quando vemos uma forma de onda, estamos colocando em um plano os eixos v e t , e estamos de frente para o eixo da frequência, que fica perpendicular ao plano e, portanto vira um ponto e fica invisível. Quando observamos o espectro de frente, é o eixo do tempo que se torna um ponto e fica invisível.

Comparando: forma de onda e espectro, portanto, se relacionam como a vista de frente e a vista de lado em desenho industrial. É sabido que às vezes ainda precisamos de uma terceira vista para representar todos os detalhes de um objeto, ou seja, a vista de cima.

O **ESPECTROGRAMA** é exatamente a vista de cima da figura tridimensional A.5.2, ou seja, representa a evolução da frequência dos termos (ou espectro) do sinal em função do tempo. Agora o eixo invisível é a amplitude. Mesmo assim, podemos mostrar a amplitude dos termos usando uma escala de cores convencionalmente previamente (ou tons de cinza em preto e branco). A figura A.5.3 mostra um exemplo de espectrograma de uma onda quadrada junto com a escala de cores para representar amplitudes relativas (feito com o **Spectrogram**):

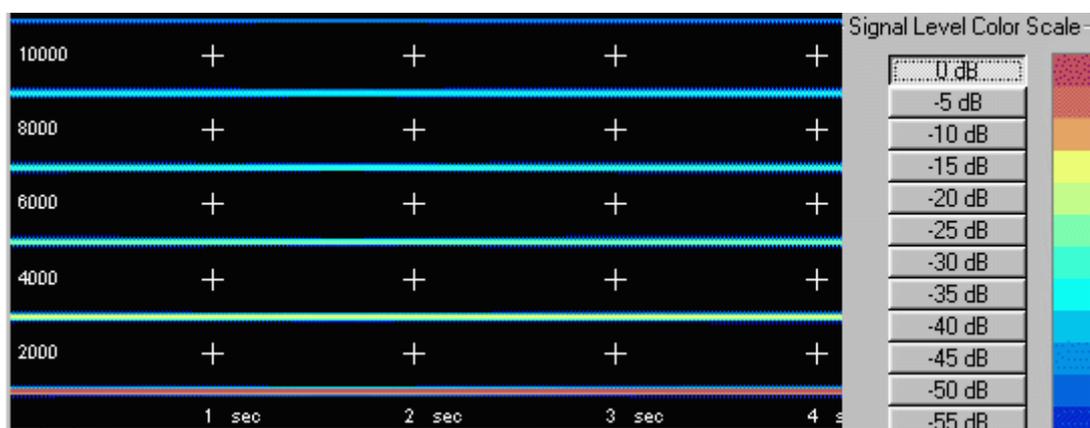
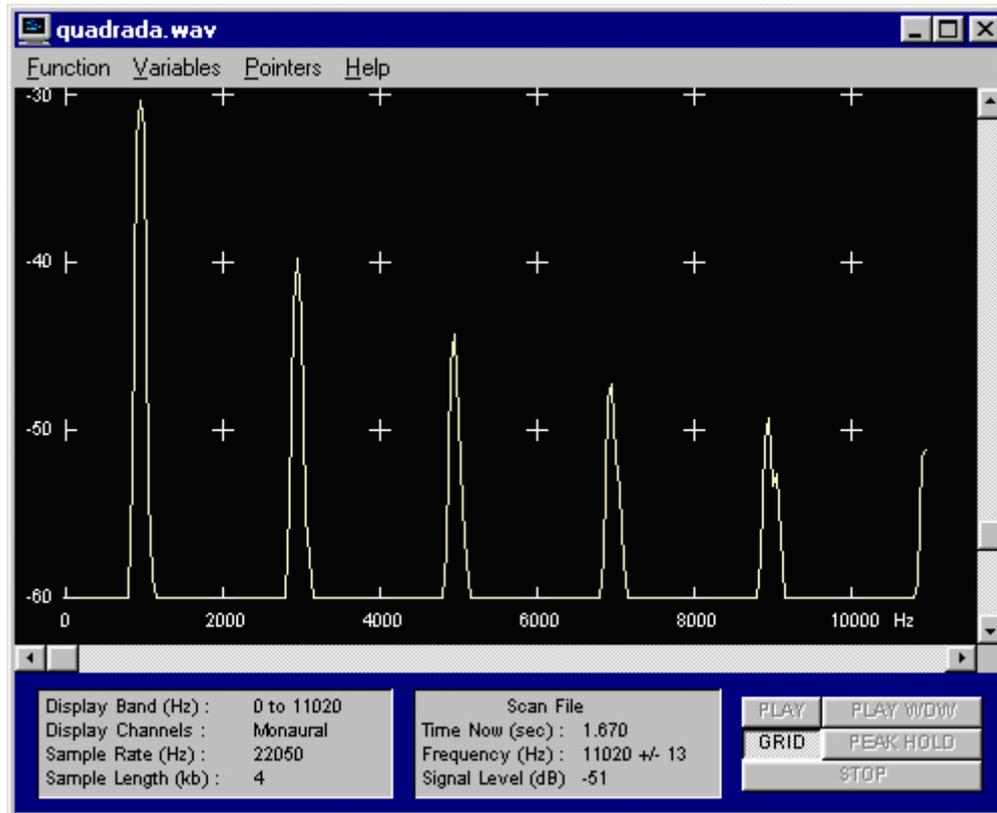


Figura A.5.3 – Espectrograma de uma forma de onda.

Observe a componente de maior amplitude (fundamental) em 1000 Hz com cor vermelha. O harmônico 9, em 9000 Hz é bem mais fraco, de cor azul claro. Neste caso particular, o espectrograma não traz muita informação suplementar, em relação ao espectro, a não ser a confirmação de que a frequência do sinal é constante no tempo. Entretanto, o espectrograma é de fundamental importância para analisar a evolução espectral de um sinal complexo e variável no tempo, como por exemplo, um **sinal de voz** ou **áudio**.

A figura A.5.4 é o espectro do sinal, obtido clicando em cima de espectrograma. Pode-se ver as frequências e as amplitudes dos harmônicos.



A.5.4 – Espectro de frequências – harmônicos.

A figura A.5.5 é um exemplo de espectrograma do sinal de voz feminina dizendo "favor ligar mais tarde", com dois espectros instantâneos, correspondentes a um som vocal, o "A", onde se destacam raias chamadas formantes, e um som não vocal produzido pelo "sss" e que mais parece ruído branco em frequências mais altas. Agora é bem visível a evolução do espectro com o tempo.

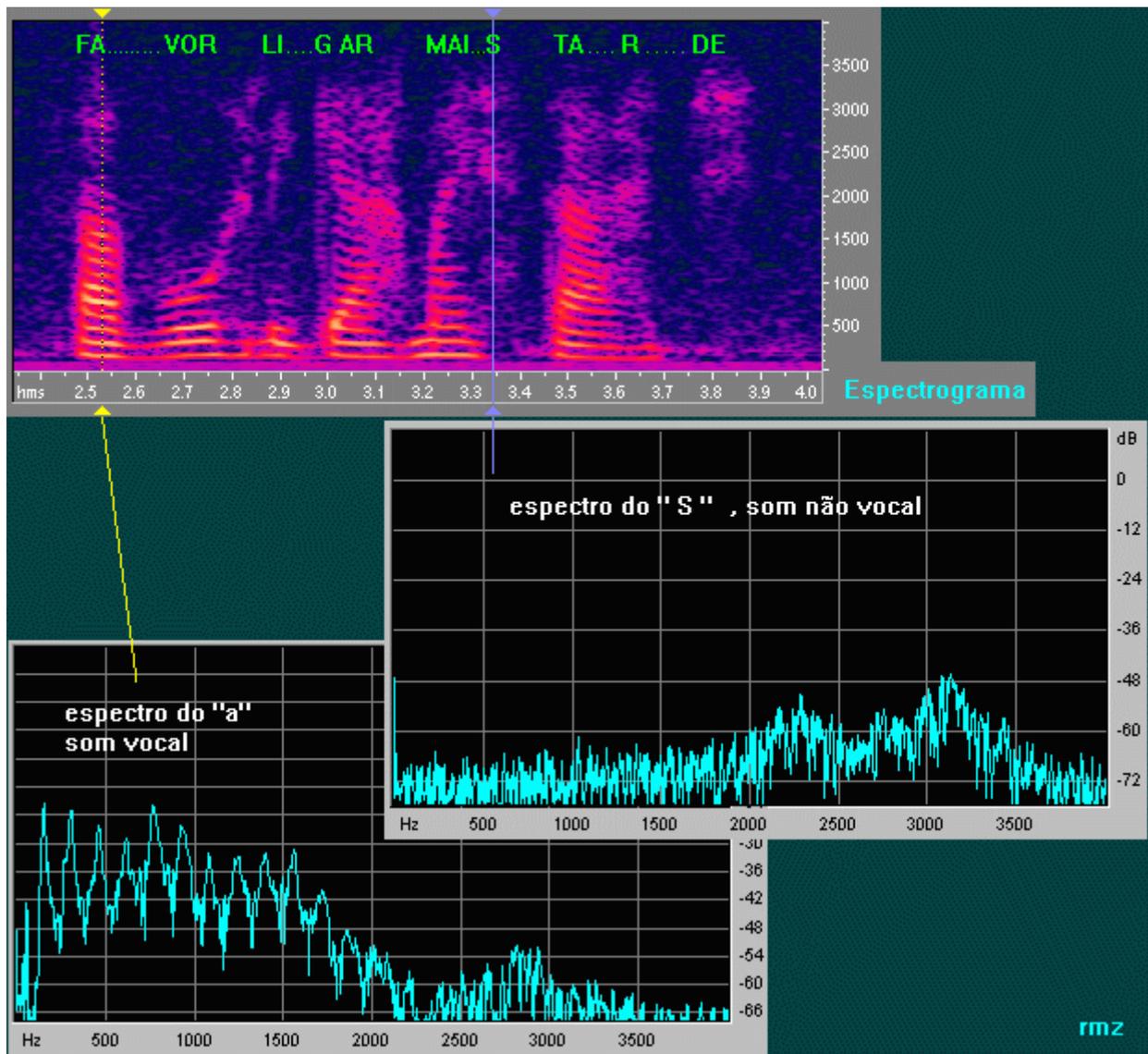


Figura A.5.5 – Espectro de frequências para a voz feminina.

Os espectros e o espectrograma acima foram feitos com o **CoolEdit**.

A.6. TEOREMA DA MÁXIMA TRANSFERÊNCIA DE POTÊNCIA

A.6.1. Transferência de Potência em Circuitos de Corrente Contínua

Sabemos que em circuitos de corrente contínua, a máxima transferência de potência ocorre quando a resistência interna da fonte é igual a resistência da carga, como mostra a figura A.6.1

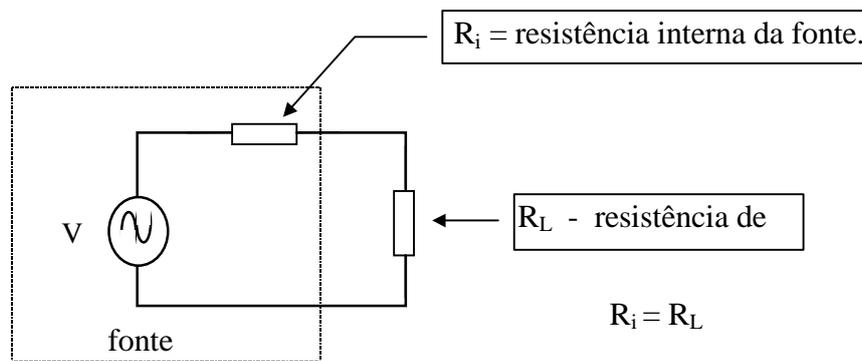


Figura A.6.1 – Máxima transferência de potência em corrente contínua.

A.6.2. Transferência de Potência em Circuitos de Corrente Alternada

No caso de corrente alternada a transferência de potência à carga será máxima, quando as seguintes condições forem verdadeiras:

- Potência ativa transferida é máxima (resistência interna da fonte igual a resistência da carga)
- Potência reativa total do circuito é nula (a reatância interna da fonte é igual a reatância da carga, porém de natureza oposta)

$$R_i = R_L \quad \text{e} \quad X_i = -X_{ca}$$

$$Z_i = Z_L^*$$

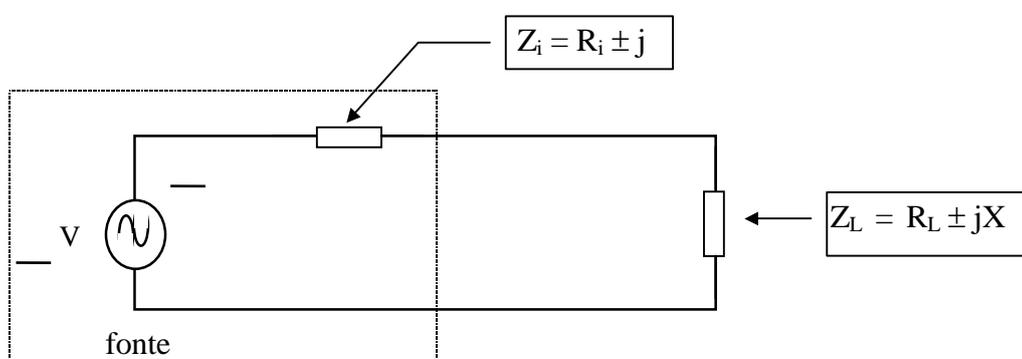
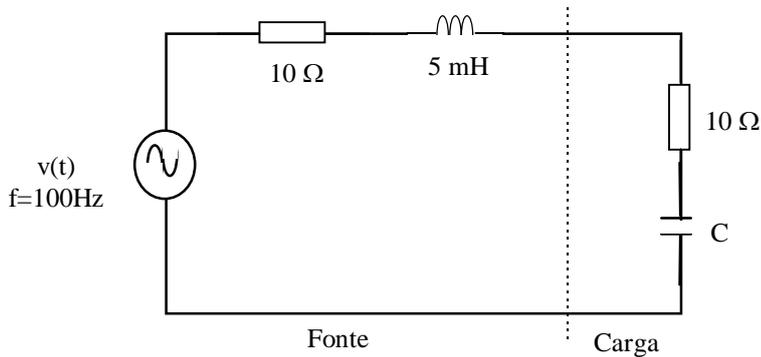


Figura A.6.2 – Máxima transferência de potência em CA.

Portanto, em corrente alternada a máxima transferência de potência ocorre na condição apresentada na figura A.6.2.

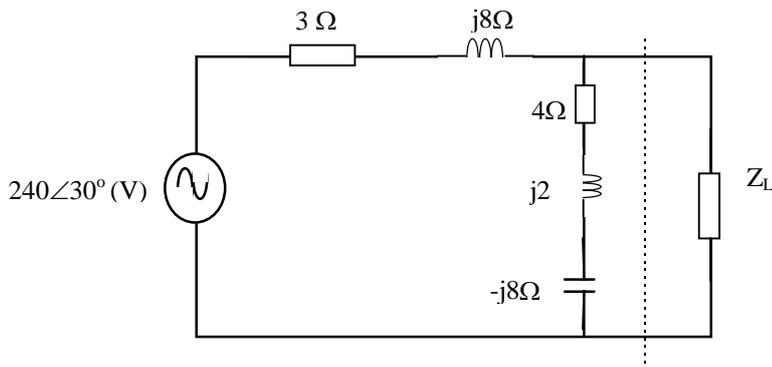
A.6.3. Exercícios Propostos:

A.6.1) Para o circuito abaixo, determinar o valor do capacitor para que ocorra a máxima transferência de potência:



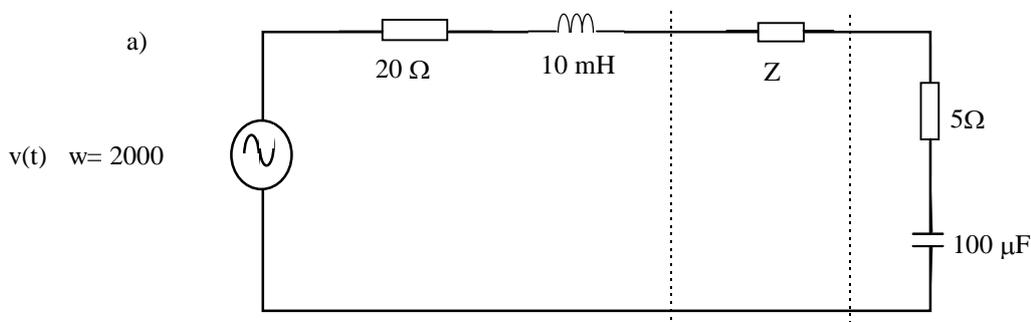
A.6.2) Para o circuito abaixo determinar:

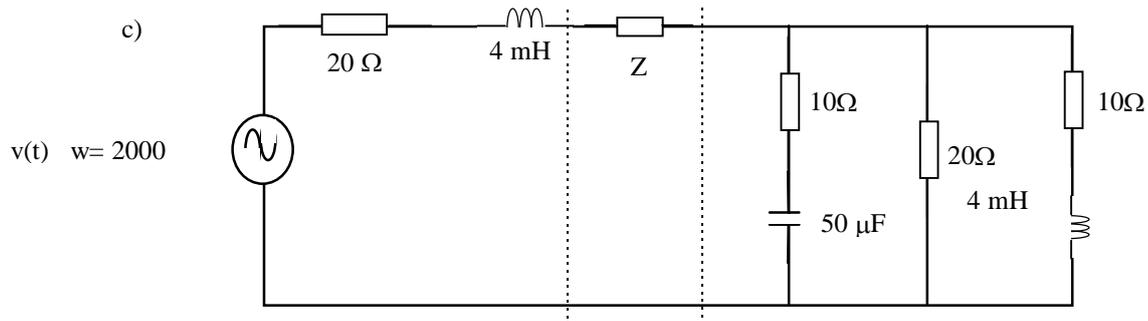
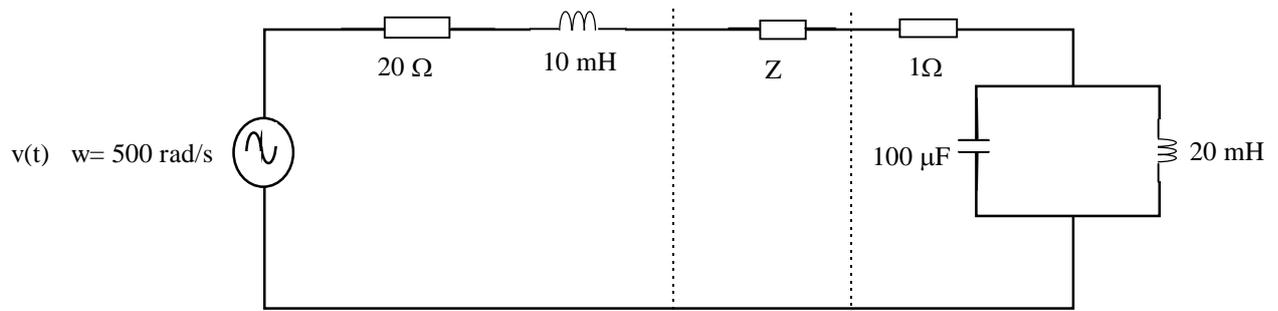
- O valor da impedância Z_L , que absorverá a máxima potência da fonte;
- O valor da potência máxima.



A.6.3) Um gerador de sinais opera em 5 MHz e possui uma impedância interna de $80 \angle 20^\circ$ (Ω), considerando que esse gerador alimenta uma carga formada por um resistor e um capacitor em paralelo, determinar o valor desses elementos de modo que a potência transferida seja máxima.

A.6.4) Para os circuitos a seguir determinar o valor da impedância Z para que a potência transferida à carga seja máxima.





A.8. FATOR DE DESLOCAMENTO E TAXA DE DISTRORÇÃO HARMÔNICA

[incluir]

A9. INFORMAÇÕES RELEVANTES

Alfabeto Grego:

Alfa	A	α	Iota	I	ι	Rô	P	ρ
Beta	B	β	Capa	K	κ	Sigma	Σ	σ ς
Gama	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mi	M	μ	Ípsilon	Y	υ
Epsílon	E	ϵ	Ni	N	ν	Fi	Φ	ϕ φ
Dzeta	Z	ζ	Csi	Ξ	ξ	Qui	X	χ
Eta	H	η	Ômicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Teta	Θ	θ	Pi	Π	π	Ômega	Ω	ω

Constantes e Valores Importantes

Quantidade	Símbolo	Valor Usual ¹⁰
Velocidade da Luz no Vácuo	c	$3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$
Constante Gravitacional	G	$6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
Carga do Elétron	e^-	$1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permeabilidade do Vácuo	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}$
Permissividade do Vácuo	$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \cdot \mu_0}$	$8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$
Massa do elétron	m_e	$9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Massa do próton	m_p	$1,6726 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Massa do nêutron	m_n	$1,6749 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Massa atômica		$1,6605 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Caloria	cal	4,186J
Zero Absoluto	0K	$-273,15^\circ \text{C}$
Radiano	rad	$57,2957795^\circ$
Pi	π	3,1415927
Neperiano	e	2,7182818

¹⁰ Os valores usuais são aproximações dos valores mais precisos obtidos atualmente e que estão disponíveis na referência bibliográfica [Giancoli].

Múltiplos Métricos:

Prefixo	Símbolo	Valor
Exa	E	10^{18}
Peta	P	10^{15}
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^9
Mega	M	10^6
Kilo	k	10^3
Hecto	h	10^2
Deka	da	10^1
Deci	d	10^{-1}
Centi	c	10^{-2}
Mili	m	10^{-3}
Micro	μ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Pico	p	10^{-12}
Femto	f	10^{-15}
Atto	a	10^{-18}

Símbolos Matemáticos:

\propto	é proporcional a
=	é igual a
\approx	é aproximadamente igual a
\neq	não é igual a (diferente de)
>	é maior que
>>	é muito maior que
<	é menor que
<<	é muito menor que
\geq	é maior ou igual a
\leq	é menor ou igual a
Σ	soma de (somatória)
\bar{x}	valor médio de x
Δx	variação em x
$\Delta x \rightarrow 0$	Δx tende a zero
\perp	é perpendicular a

Conversões e Equivalências de Unidades:**Matemáticas:**

$$\sqrt{2} = 1,4142136$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508$$

$$1\text{rad} = 57,2957795^\circ$$

$$1^\circ = 0,01745\text{rad}$$

$$1\text{rpm} = 0,1047\text{rad/s}$$

Comprimento:

$$1\text{ polegada (in)} = 2,54\text{cm}$$

$$1\text{ pé (ft)} = 30,5\text{cm}$$

$$1\text{ milha (mi)} = 1,61\text{km}$$

$$1\text{ ângstrom (\AA)} = 1 \times 10^{-10}\text{m}$$

$$1\text{ ano-luz} = 9,46 \times 10^{15}\text{m}$$

Volume:

$$1\text{ litro (L)} = 1000\text{cm}^3$$

$$1\text{ galão americano} = 3,78\text{L}$$

Velocidade:

$$1\text{ km/h} = 0,278\text{m/s}$$

$$1\text{ mi/h} = 1,609\text{km/h}$$

$$1\text{ m/s} = 3,60\text{km/h}$$

Força:

$$1\text{ libra (lb)} = 4,45\text{N}$$

Energia:

$$1\text{kcal} = 4,18 \times 10^3\text{J} = 3,97\text{BTU}$$

$$1\text{CV} = 1,602 \times 10^{-19}\text{J}$$

$$1\text{kWh} = 3,6 \times 10^6\text{J} = 860\text{kcal}$$

Potência:

$$1\text{W} = 1\text{J/s} = 3,42\text{BTU/h}$$

Pressão:

$$1\text{atm} = 1,013 \times 10^5\text{N/m}^2$$

$$1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$$

$$1\text{lb/m}^2 = 6,9 \times 10^3\text{N/m}^2$$